МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ И.А. БУНИНА»

# CONTINUUM

# МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск №1(13) / Елец, 2019

**УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1)

**THE FOUNDER AND THE PUBLISHER:**

The Federal State Educational Government-Financed Institution of Higher Education «Bunin Yelets State University» (399770, Lipetsk region, Yelets, st. Kommunarov, 28, 1)



**ISSN** 2500-1957

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ



### НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

# CONTENTS

## ASPECTS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATICS



## INNOVATIONS FEDERAL STANDARDS AND EDUCATIONAL TECHNOLOGIES IN THE TEACHING OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

# ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.925

## О НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ГРУППАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Ноздрунов Владимир Васильевич**
к.ф.-м.н., доцент
v_noz@mail.ru
г. Орел

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева

**Аннотация.** Рассматривается задача группового анализа по нахождению дискретного точечного преобразования, переводящего автономную систему двух ОДУ второго порядка в систему того же класса, что и исходная. Доказывается теорема об отсутствии дискретных точечных групп преобразований общего вида у нетривиальной автономной системы двух ОДУ второго порядка и теорема о виде дискретной точечной группы преобразований частного вида. Приводится пример построения точечной дискретной группы преобразований для конкретной автономной системы двух ОДУ второго порядка.

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, симметрии систем дифференциальных уравнений, дискретная точечная группа преобразований, дискретно-групповой анализ

Рассматривается автономная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с правыми частями, не зависящими от производных

$$\begin{cases} y'' = F(y,z,\overline{a}), \\ z'' = G(y,z,\overline{a}), \end{cases} \tag{1}$$

где $\overline{a} \in R^n$ – вектор существенных параметров [1], т.е. рассматривается система, приведенная к каноническому виду [2].

Наиболее общим точечным преобразованием, сохраняющим автономность системы (1), является преобразование

$$\begin{cases} y = f(u,v), \\ z = g(u,v), \\ x = c\cdot t + h(u,v), \end{cases} \tag{2}$$

где $h_u \neq 0, h_v \neq 0$, $c \neq 0$.

Условием обратимости преобразования (2) является отличие от нуля якобиана этого преобразования, т.е.

$$\begin{vmatrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ c & h_u & h_v \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Ставится задача по нахождению дискретного точечного преобразования (2), которое переводит систему (1) в систему того же класса систем ОДУ, что и исходное, т.е. в систему вида

$$\begin{cases} \ddot{u} = F(u, v, \bar{b}), \\ \ddot{v} = G(u, v, \bar{b}). \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 1. Условие $c \neq 0$ является принципиальным, т.к. в противном случае не выполняется (3) и преобразование (2) становится не обратимым.

Замечание 2. Если в преобразовании (2) считать, что $h(u,v)=h$ – константа, то получаем простейшее точечное преобразование, сохраняющее автономность системы (1),

$$\begin{cases} y = f(u, v), \\ z = g(u, v), \\ x = c \cdot t + h. \end{cases} \tag{5}$$

*Теорема 1.* Нетривиальная автономная система (1) не допускает никакой дискретной точечной группы преобразования (2).

*Доказательство*. Воспользуемся методом от противного. Пусть система (1) допускает дискретное точечное преобразование (2). Выполнив подстановку (2) в систему (1), получим дифференциальные выражения, зависящие от новых переменных и их производных первого и второго порядков $u, v, \dot{u}, \dot{v}, \ddot{u}, \ddot{v}$ и от функций $f$, $g$ и $h$ и их частных производных по $t, u$ и $v$ до второго порядка включительно (так как рассматриваются точечные преобразования и функции $f$, $g$ и $h$ не зависят от производных $\dot{u}, \dot{v}, \ddot{u}, \ddot{v}$).

Замена $\ddot{u}, \ddot{v}$ на (4) в получившихся выражениях приводит к определяющей системе относительно функций $f$, $g$ и $h$, содержащих переменные $\dot{u}, \dot{v}$, от которых функции $f$, $g$ и $h$ не зависят.

Расщепляя по независимым переменным определяющую систему, получим переопределенную систему из 20 уравнений

$$G(u,v,\bar{b})\left[f_v h_u - f_u h_v\right] - 3c^2 h_u F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$F(u,v,\bar{b})\left[f_v h_u - f_u h_v\right] + 3c^2 h_v F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$f_v G(u,v,\bar{b}) + f_u F(u,v,\bar{b}) - c^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$G(u,v,\bar{b})\left[g_v h_u - g_u h_v\right] - 3c^2 h_u G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$F(u,v,\bar{b})\left[g_v h_u - g_u h_v\right] + 3c^2 h_v G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$g_v G(u,v,\bar{b}) + g_u F(u,v,\bar{b}) - c^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$

$$f_{uu} - 3h_u^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$f_{vv} - 3h_v^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$f_{uv} - 3h_u h_v F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$g_{uu} - 3h_u^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0, \tag{6}$$
$$g_{vv} - 3h_v^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$g_{uv} - 3h_u h_v G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$f_{uu} h_u - f_u h_{uu} - h_u^3 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$f_{vv} h_v - f_v h_{vv} - h_v^3 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$g_{uu} h_u - g_u h_{uu} - h_u^3 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$g_{vv} h_v - g_v h_{vv} - h_v^3 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$2 f_{uv} h_v + f_{vv} h_u - 2 f_v h_{uv} - f_u h_{vv} - 3h_u h_v^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$2 f_{uv} h_u + f_{uu} h_v - 2 f_u h_{uv} - f_v h_{uu} - 3h_v h_u^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$2g_{uv} h_v + g_{vv} h_u - 2g_v h_{uv} - g_u h_{vv} - 3h_u h_v^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$2g_{uv} h_u + g_{uu} h_v - 2g_u h_{uv} - g_v h_{uu} - 3h_v h_u^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0.$$

Из первых двух уравнений системы (6) выразим $F(u,v,\bar{b})$ и $G(u,v,\bar{b})$.

$$G(u,v,\bar{b}) = \frac{3c^2 h_u F(f(u,v), g(u,v), \bar{a})}{f_v h_u - f_u h_v},$$
$$F(u,v,\bar{b}) = -\frac{3c^2 h_v F(f(u,v), g(u,v), \bar{a})}{f_v h_u - f_u h_v}, \tag{7}$$

где $f_v h_u - f_u h_v \neq 0$, так как в противном случае из первых двух уравнений системы (6) получим $h_u = 0$ и $h_v = 0$, что противоречит условиям использования преобразования (2).

Подставим (7) в третье уравнение системы (6)

$$f_v \frac{3c^2 h_u F(f(u,v), g(u,v), \bar{a})}{f_v h_u - f_u h_v} - f_u \frac{3c^2 h_v F(f(u,v), g(u,v), \bar{a})}{f_v h_u - f_u h_v} - c^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0$$

.

После упрощения, получим уравнение

$$2c^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$

из которого следует, что или $c = 0$, что нарушило бы обратимость преобразования (2), или $F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0$, то есть приходим к тривиальному случаю, который сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

Аналогично из четвертого, пятого и шестого уравнений системы (6) получаем, что $G(f(u,v),g(u,v),\bar{a})=0$.

Таким образом, пришли к противоречию, состоящему в том, что преобразование (2) допускается только тривиальной системой, то есть системой (1) с правыми частями, тождественно равными нулю.

Теорема доказана.

Далее рассмотрим частный случай преобразования (2), когда $h(u,v) = h$ – константа, то есть преобразование вида (5).

*Теорема 2.* Автономная система (1) допускает дискретную точечную группу, определяемую преобразованием (5), если и только если совместна система алгебраических уравнений (относительно $u$ и $v$)

$$\begin{cases} c_1 F(u,v,\bar{b}) + c_2 G(u,v,\bar{b}) - c^2 F(f(u,v),g(u,v),\bar{a}) = 0, \\ c_4 F(u,v,\bar{b}) + c_5 G(u,v,\bar{b}) - c^2 G(f(u,v),g(u,v),\bar{a}) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c$ – некоторые постоянные, $c \neq 0$, $c_1c_5 - c_2c_4 \neq 0$, при этом

$$\begin{aligned} f(u,v) &= c_1u + c_2v + c_3, \\ g(u,v) &= c_4u + c_5v + c_6. \end{aligned} \tag{9}$$

*Доказательство*. Пусть система (1) допускает дискретное преобразование (5). Выполнив подстановку (5) в систему (1), получим систему определяющих уравнений, расщепив которую по независимым переменным $\dot{u},\dot{v}$ получим переопределенную систему. Так как преобразование (5) является частным случаем преобразования (2) при условии, что $h(u,v) = h$ – константа , то есть $h_u = 0$ и $h_v = 0$, то переопределенную систему для преобразования (5) можно получить из переопределенной системы (6) преобразования (2), положив в ней $h_u = 0$ и $h_v = 0$.

$$\begin{aligned} &f_{uu} = 0, \\ &f_{vv} = 0, \\ &f_{uv} = 0, \\ &g_{uu} = 0, \\ &g_{vv} = 0, \\ &g_{uv} = 0, \\ &f_v G(u,v,\bar{b}) + f_u F(u,v,\bar{b}) - c^2 F(f(u,v),g(u,v),\bar{a}) = 0, \\ &g_v G(u,v,\bar{b}) + g_u F(u,v,\bar{b}) - c^2 G(f(u,v),g(u,v),\bar{a}) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

Из первых шести уравнений системы (10) находим структуру $f(u,v)$ и $g(u,v)$:

$$f(u,v) = c_1u + c_2v + c_3,$$
$$g(u,v) = c_4u + c_5v + c_6.$$

Подставив их в последние два уравнения системы (10), получим:

$$\begin{cases} c_1 F(u,v,\bar{b}) + c_2 G(u,v,\bar{b}) - c^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0, \\ c_4 F(u,v,\bar{b}) + c_5 G(u,v,\bar{b}) - c^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0, \end{cases}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c$ – некоторые постоянные, $c \neq 0$, $c_1 c_5 - c_2 c_4 \neq 0$– условия обратимости преобразования (5).

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее следствие.

Следствие. Для автономной системы (1), с правыми частями, не удовлетворяющими функциональному уравнению (8), нетривиальные дискретные симметрии могут быть только динамическими, то есть зависящими от производных.

Пример. Рассмотрим автономную систему (1), с правыми частями, являющимися полиномами первой степени относительно *y*, *z*(линейная система двух уравнений):

$$\begin{cases} y'' = k_1 y + k_2 z + k_3, \\ z'' = k_4 y + k_5 z + k_6. \end{cases} \tag{11}$$

В общем виде система (11) имеет шестимерное пространство параметров. Найдя непрерывную группу эквивалентности [2], данную систему можно свести к системе с одномерным пространством параметров, например (после переобозначений), к следующему виду

$$\begin{cases} y'' = a_1 z, \\ z'' = y + z, \end{cases} \tag{12}$$

где параметр $a_1$ является существенным, то есть представление системы (12) является каноническим [2]. Используя теорему 2 найдем дискретную точечную группу преобразований (5), системы (12), в котором $f(u,v)$ и $g(u,v)$ определяются соотношением (9), то есть преобразование

$$\begin{aligned} &y = c_1 u + c_2 v + c_3, \\ &z = c_4 u + c_5 v + c_6, \\ &x = c \cdot t + h. \end{aligned} \tag{13}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c, h$ – некоторые постоянные, ($c \neq 0$, $c_1 c_5 - c_2 c_4 \neq 0$).

Для этого выпишем правые части системы (12)

$$\begin{aligned} &F(y,z,\bar{a}) = a_1 z, \\ &G(y,z,\bar{a}) = y + z. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставим (5), с учетом $f(u,v)$ и $g(u,v)$ из (9) в (14)

$$\begin{aligned} &F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = a_1 c_4 u + a_1 c_5 v + a_1 c_6, \\ &G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = (c_1 + c_4) u + (c_2 + c_5) v + c_3 + c_6, \end{aligned} \tag{15}$$

и выпишем правые части системы (12) в которые они перейдут под действием преобразования (13)

$$\begin{aligned} &F(u,v,\bar{b}) = b_1 v, \\ &G(u,v,\bar{b}) = u + v. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя (14), (15) и (16) в два уравнения системы (8) получим систему, из которой конкретизируются коэффициенты преобразования (13) при условии, что данная система тождественно выполняться при любых *u* и *v*.

$$\begin{cases} c_1 b_1 v + c_2(u+v) - c^2 a_1 c_4 u - c^2 a_1 c_5 v - c^2 a_1 c_6 = 0, \\ c_4 b_1 v + c_5(u+v) - c^2(c_1+c_4)u - c^2(c_2+c_5)v - c^2(c_3+c_6) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

Так как коэффициенты преобразования не зависят от *u* и *v*, то расщепляя систему (17) по независимым переменным *u* и *v* получим систему на коэффициенты преобразования (13) $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c$ и параметр $a_1$ исходной системы (12)

$$\begin{aligned} & c_1 b_1 + c_2 - c^2 a_1 c_5 = 0, \\ & c_2 - c^2 a_1 c_4 = 0, \\ & c^2 a_1 c_6 = 0, \\ & c_4 b_1 + c_5 - c^2(c_2 + c_5) = 0, \\ & c_5 - c^2(c_1 + c_4) = 0, \\ & c^2(c_3 + c_6) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Из системы (18) получаем

$$\begin{aligned} & c_3 = 0,\ c_6 = 0, \\ & c_2 = c^2 a_1 c_4, \\ & c_5 = c^2(c_1 + c_4), \\ & c^2 = \frac{c_1 + c_4 - a_1 c_4^2}{c_1^2 + c_1 c_4 - a_1 c_4^2}, \end{aligned} \tag{19}$$

при этом коэффициенты преобразования (13) должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} & \frac{c^2 c_5 a_1 - c_2}{c_1} = \frac{c^2(c_2 + c_5) - c_5}{c_4}, \\ & c_1 c_5 - c_2 c_4 \neq 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Параметры системы при этом преобразуются по формуле

$$b_1 = \frac{c^2 a_1 (c^2(c_1 + c_4) - c_4)}{c_1}, \tag{21}$$

то есть в результате оказывается, что система (12) допускает бесконечную дискретную группу с образующей (21), при этом коэффициенты дискретного точечного преобразования (13) должны удовлетворять условиям (19) и (20).

Так же полученный результат можно использовать в обратном порядке, то есть выбрав удобную для исследования модель (16) (то есть коэффициенты преобразованной системы), уточнить коэффициенты преобразования (13) при помощи (21).

Таким образом, появилась возможность прогнозировать преобразование, позволяющее переводить исходную систему в систему с конкретными свойствами и удобную для дальнейшего исследования.

**Список литературы**


1. Зайцев, В.Ф., Флегонтов, А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛИИАН, 1991.
2. Ноздрунов, В.В. Алгоритм построения группы эквивалентности по параметрам для произвольной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III Международной научно-практической конференции 23-26 ноября 2017 г. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. Орел: ОГУ, 2017.


## ABOUT SOME DISCRETE POINT GROUP TRANSFORMATIONS OF THE AUTONOMOUS SYSTEM OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER


**V.V. Nozdrunov**
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
v_noz@mail.ru
Orel

Orel State University
named after I. S. Turgenev



**Abstract.** We consider the problem of group analysis to find a discrete point transformation that translates an Autonomous system of two odes of the second order into a system of the same class as the original. We prove a theorem on the absence of discrete point groups of transformations of a General form in a nontrivial Autonomous system of two odes of the second order and a theorem on the form of a discrete point group of transformations of a particular kind. An example of construction of a point discrete group of transformations for a particular Autonomous system of two odes of the second order is given.



**Keywords:** system of differential equalizations, symmetry of the systems of differential equalizations, discrete point group of transformations, discretely-group analysis.


**References**


1. Zaitsev V. F., Flegontov A.V.Diskretno-gruppovy`e metody` integrirovaniia oby`knovenny`kh differentcial`ny`kh uravnenii`[Discrete-group methods of integration of ordinary differential equations]. L.: Publishing house LIYAN, 1991.
2. Nozdrunov, V. V. Algoritm postroeniia gruppy` e`kvivalentnosti po parametram dlia proizvol`noi` sistemy` dvukh oby`knovenny`kh differentcial`ny`kh uravnenii` vtorogo poriadka [Algorithm of equivalence group construction by parameters for an arbitrary system of two ordinary differential equations of the second order] / Modern problems of physical and mathematical Sciences. Proceedings of the III International scientific-practical conference 23-26 November 2017, under the General editorship of T. N. Nazarovoj. - Eagle: OGU, 2017.

УДК 519.688

# ОДНОМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ ДИСПЕРСНОГО ПОТОКА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Тукмаков Дмитрий Алексеевич**
к.ф.-м.н.,н.с.
tukmakovDA@imm.knc.ru
г. Казань

Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр Российской академии наук

**Аннотация**. В статье представлена математическая модель и численный алгоритм решения уравнения математической модели динамики электрически заряженной дисперсной среды в вязком сжимаемом теплопроводном газе. Математическая модель предполагает описание динамики несущей среды уравнение Навье-Стокса, силовое и тепловое взаимодействие фаз, а также учёт воздействия электрического поля на динамику дисперсной компоненты. Также в статье приведён численный расчёт динамики несущей среды, результаты расчёта сопоставлены с известным из литературы аналитическим решением.

**Ключевые слова**: механика жидкости и газа, многофазные среды, электрическое поле, сила Кулона, уравнение Навье-Стокса.

Многие природные явления и процессы, протекающие в технике, связаны с движением сплошных сред, являющихся неоднородными по своим механическим и физико-химическим свойствам в связи с этим одним из важных разделов современной механики жидкости и газа, является динамика неоднородных сред [1,2]. При этом экспериментальное изучение течений в неоднородных средах в ряде случаев затруднено, и исследование таких течений требует создания математических моделей [1]. Примером таких сред могут быть взвеси твёрдых или жидких дисперсных включений в газе- аэрозоли и газовзвеси. Среды, состоящие из взвешенных в газе твёрдых частиц, называются газовзвесями или же запылёнными средами.

Одной из разновидностей композитных материалов являются металлические частицы, покрытые слоем полимера, технология изготовления этого материала [3] предполагает, что происходит столкновение двух дисперсных потоков –потока капель полимера имеющих электрический заряд и потока частиц металла электрически заряженных, но с зарядом противоположного знака. В результате образуется полидисперсная смесь, состоящая из композитного материала и исходных компонент. Возникает задача разделения компонент полидисперсной смеси имеющих различные физические свойства, прежде всего различную плотность.

В данной работе предложена математическая модель течения среды, представляющей собой электрически заряженную газовзвесь–предполагается, что частицы находятся под действием сил как аэродинамической, так и электромагнитной природы. Для описания её движения применяется система уравнений динамики двухскоростной и двухтемпературной газовзвеси со скоростным и температурным взаимодействием фаз [1,4]. Математическая модель включает в себя уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы.

Движение несущей среды описывается одномерной системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho_1\ u_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_1\ u_1^2+p-\tau\right)=-F+\alpha\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(e_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left[e_1+p-\tau\right]u_1+\lambda\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)=$$

$$=Q-|F|(u_1-u_2)-\alpha\left(\frac{\partial(pu)}{\partial x}\right),$$

$$\tau=\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

Динамика дисперсной фазы описывается уравнением сохранения «средней плотности» - произведения физической плотности материала частиц и объемного содержания дисперсной фазы, изменяющегося на различных участках физической области вместе с движением твёрдых частиц, [1] уравнением сохранения импульса и уравнением сохранения энергии, записанными с учетом теплообмена, обмена импульсом с несущей средой и с учетом силы Кулона, действующей на частицы дисперсной фазы:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_2\, u_2)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho_2\, u_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_2\ u_2^2\right)=F-\alpha\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial(e_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(e_2\, u_2)=-Q,$$

$$\rho_2=\alpha_2\ \rho_{20},\ \ e_2=\rho_2 C_{v2} T_2,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\rho_2 q$$

$$F=\frac{3}{4}\frac{\alpha}{(2r)}C_d\ \rho_1|u_1-u_2|(u_1-u_2)+\alpha\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+$$

$$+0.5\alpha\rho_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+-\frac{\partial u_2}{\partial t}-u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)-q_0\rho_2\,\partial\varphi/\partial x-\rho_2 g,$$

$$C_{d2}=\frac{24}{Re_{21}}+\frac{4}{Re_{21}^{0.5}}+0.4,\ \ ,$$

$$M_{21}=|u_1-u_2|/c\ ,\ \ Re_{21}=\rho_1|u_1-u_2|2r/\mu,\ \ Pr=\gamma\, C_p\mu/\lambda$$

Здесь $p$, $\rho_1$, $u_1$–давление, плотность, скорость несущей среды; $T_1$ , $e_1$ – температура и полная энергия газа; $\rho_2$, $T_2$ , $e_2$, $u_2$ – средняя плотность, температура, внутренняя энергия, скорость дисперсной фазы.

Температура несущей среды находится из уравнения $T_1=(\gamma-1)(e_1/\rho_1-0.5u_1^2\ )/R$, где $R$- газовая постоянная несущей фазы. Силовое взаимодействие несущей и дисперсной фазы учитывает силу Стокса, силу Архимеда и силу присоединённых масс, также учитывается сила Кулона, воздействующая на частицы дисперсной фазы и сила тяжести [1,4-6].

Математическая модель предполагает монодисперсный состав твёрдой фазы газовзвеси – все частицы имеют одинаковый размер и одинаковые физические свойства – плотность и теплоёмкость материала. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_2=\rho_2C_pT_2$, где $C_p$ – удельная теплоемкость единицы массы вещества из которого состоят частицы. В уравнение энергии для несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа, коэффициент теплообмена $\alpha^T$ на поверхности частица- несущая среда и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей- $Q=\alpha^T 4\pi r^2(T_1-T_2)n=6\alpha Nu\lambda\ (T_1-T_2)/(2r)^2$ , где $Nu=2r\alpha^T/\lambda$.

Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительных чисел Маха, Рейнольдса и от числа Прандтля [1]:

$$Nu = 2\,exp(-M_{20}) + 0.459\,Re_{20}^{0.55}\,Pr^{0.33}, 0 \le M_{20} \le 2\ ,\ 0 \le Re_{20} < 2\cdot 10^5.$$

Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, среднею плотность твердой фазы и напряженность электрического поля [4-6]. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле. В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газовзвеси, отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды:

$$divE = \frac{d\boldsymbol{E}}{dx}, \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi,\quad \Delta\varphi = -\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon\varepsilon_0},\ \rho_{эл} = \rho_1\cdot q,\ \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \ Ф/м, \nabla = \frac{d}{dx}, \Delta = \frac{d^2}{dx^2}$$

где $q_0$– удельный заряд единицы массы твердой фракции, $\varphi$– потенциал электрического поля. Таким образом, модель учитывает внутреннее электрическое поле дисперсной фазы, изменение которого происходит вместе с перераспределением концентрации заряженных частиц газовзвеси.

Система уравнений (1)-(2) может быть записана в матричном виде:

$$\boldsymbol{q}_t + \boldsymbol{E}_x = \boldsymbol{H}\ ; \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p - \tau \\ \rho_2 u_2^2 \\ (e_1 + p - \tau)u_1 + \lambda\,\partial T_1/\partial x \\ e_2\,u_2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F + \alpha\,\partial p/\partial x \\ F\rho_{10}/\rho_{20} - \alpha(\partial p/\partial x)\,\rho_{10}/\rho_{20} \\ -Q - |F|(u_1 - u_2) + \alpha\,\partial(pu_1)/\partial x \\ Q \end{bmatrix}.$$

Алгоритм явной схемы Мак−Кормака [7] для системы уравнений (3) включает в себя последовательно выполняемые шаги предиктор и корректор:

$$\mathbf{q}_\mathbf{j}^* = \mathbf{q}_\mathbf{j}^\mathbf{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{E}_\mathbf{j+1}^\mathbf{n} - \mathbf{E}_\mathbf{j}^\mathbf{n}\right) + \Delta t \mathbf{H}_\mathbf{j}^\mathbf{n} \ ,$$

$$\mathbf{q}_\mathbf{j}^\mathbf{n+1} = 0,5(\mathbf{q}_\mathbf{j}^\mathbf{n} + \mathbf{q}_\mathbf{j}^\mathbf{n}) - 0,5\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{E}_\mathbf{j}^\mathbf{n} - \mathbf{E}_\mathbf{j}^\mathbf{n}\right) + 0.5\Delta t \mathbf{H}_\mathbf{j}^\mathbf{n} \ .$$

Система уравнений записывалась в обобщенных криволинейных координатах: физическая область течения в переменных $(x,t)$ отображалась на каноническую расчетную область в переменных $(\xi,\ t)$ и решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка. Монотонность решения достигалась с помощью применения схемы нелинейной коррекции [6] к вектору $U= (\rho_1,u_1,e_1, \rho_2,u_2,e_2)^T$ после перехода на новый временной слой при $t = t^{n+1}$. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль координаты $\xi$, а затем вдоль координаты $\eta$ в расчетной области [6].

Нижний индекс обозначает номер узла сетки соответственно вдоль $\xi$:

$$\boldsymbol{U}_j = \tilde{\boldsymbol{U}}_j + k\left(\delta\boldsymbol{\Phi}_{j+1/2} - \delta\boldsymbol{\Phi}_{j-1/2}\right) \ ,$$

где $\delta\boldsymbol{\Phi}_{j+1/2} = \delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1/2}$, если $\left(\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j-1/2}\cdot\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1/2}\right)<0,$ или $\left(\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1/2}\cdot\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+3/2}\right)<0,$ и $\delta\Phi_{j+1/2}=0$ в любом другом случае.

Здесь использованы обозначения:

$$\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j-1/2} = \tilde{\boldsymbol{U}}_j - \tilde{\boldsymbol{U}}_{j-1},\ \delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1/2} = \tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1} - \tilde{\boldsymbol{U}}_j,\ \delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+3/2} = \tilde{\boldsymbol{U}}_{j+2} - \tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1},$$

где $\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_j$-значение функции после перехода на $(n+1)$ -ый временной слой по схеме Мак-Кормака, коэффициент $k$= 0.1.

Система уравнений дополнялась соответствующими начальными и граничными условиями. На границах расчетной области задавались граничные условия Дирихле для составляющих скорости несущей и дисперсной фазы и граничные условия Неймана для остальных функций [2,6,7]. Шаг по времени вычислялся из условия типа Куранта-Леви-Фридрихса [7].

Для тестирования работоспособности модели динамики сплошной среды было проведено сопоставление численного и аналитического решения задачи гидромеханики.

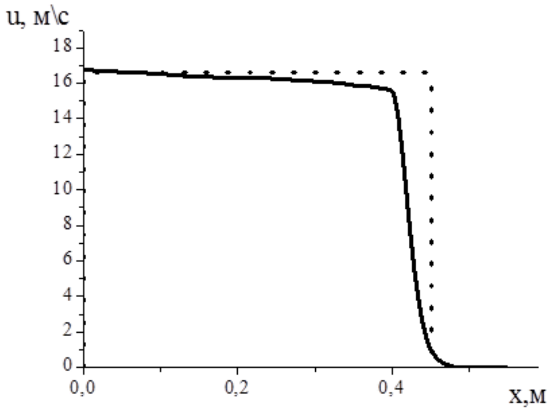
Одной из классических задач динамики идеального газа имеющих аналитическое решение является задача о генерации ударной волны движущимся поршнем. Поршень, расположенный на левом конце трубы, мгновенно разгоняется до скорости $u_0$, после чего движется равномерно. Поршень толкает перед собой слой газа, в котором формируется ударная волна, бегущая по неподвижному невозмущенному газу с некоторой скоростью θ, оставляющая за собой возмущенный газ, выведенный из состояния покоя и движущийся со скоростью - $V$.

Аналитический расчет скорости распространения ударной волны $\theta$ и скорости потока газа $V$ выполняется по следующим формулам [8]:

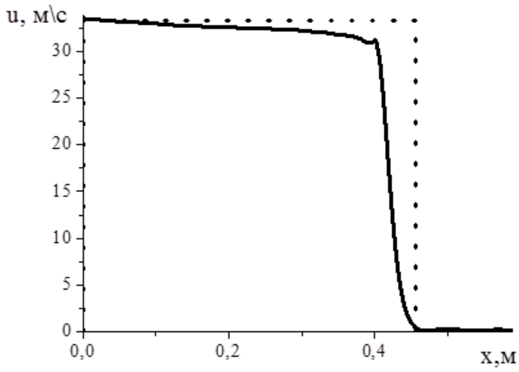
$$\theta = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2}{p_1}} \cdot c\,,$$

$$V = \frac{2}{\gamma+1}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2}{p_1}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2}{p_1}}}\right) \cdot c \qquad (4)$$

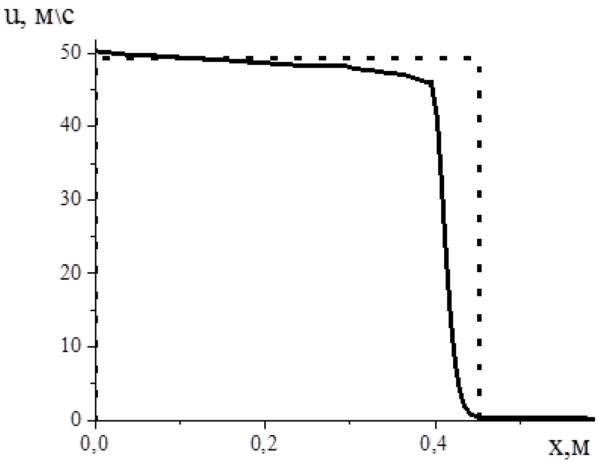
Здесь $p_1$ и $p_2$ - давление невозмущенного и возмущенного газа, c –скорость звука.




а




б




в

Рис. 1. Скорость движения газа в момент времени t=0.22 при различных скоростях движения поршня: а- $u_0$=17м/с, б- $u_0$=34 м/с, в- $u_0$= 51 м/с.

В начальный момент времени во внутренних узлах расчетной области задавались температура, плотность и скорость газа $u(t=0)= -u_0$ , где $u_0$- скорость поршня в системе координат с движущимся поршнем. Конечно-разностная сетка содержала $N$ =200 узлов. Начальная температура и плотность невозмущенного газа: $T= 293К$, $\rho=1,3$ *кг/м*$^3$, начальное давление в безразмерных единицах $p_1$=100000 кПа.

На рисунке 1.(а- в) показаны волны скорости газа, полученные численно. Сравнение проведено для скоростей движения газа в момент времени $t$= 0,45. Аналитическое и численное решения хорошо согласуются между собой: для скоростей движения поршня $u_0$=17 м/с, $u_0$=34 м/с, $u_0$ =51 м/с аналитические и численные значения скорости потока составляют соответственно $V_а$ =16,76 м/с, $V_ч$ =16,59 м/с; $V_а$ =33,47 м/с, $V_ч$ =33,13 м/с; $V_а$ =50,02 м/с, $V_ч$ =49,51 м/с.

Анализ численных результатов позволяет сделать вывод о том, что явный конечно-разностный метод решения уравнений математической модели, дополненный алгоритмом со схемой нелинейной коррекции описывает движение среды в задаче формирования ударной волны имея хорошее соответствие аналитическому решению, имеющемуся в модели идеального газа. В связи с этим предложенная в статье модель динамики запылённой среды в электрическом поле может быть использована для численного изучения физических процессов формирования и развития электрического разряда в комбинированных средах.

*Работы выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №18-31-00370.*

**Список литературы**

1. Кутушев, А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А.Г. Кутушев. СПб.: Недра, 2003, 284 с.
2. Temkin, S. Suspension acoustics: An introduction to the physics of suspension / S. Temkin // Cambridge University Press, 2005. 398p.
3. Богомолова О. Ю., Данилаев М.П. Параметры течения многофазных газовых потоков в задаче капсулирования субмикронных частиц полимером / О.Ю. Богомолова , М.П. Данилаев //Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 3. С. 25 − 27.
4. Dikalyuk A.S., Surzhikov S.T. Numerical simulation of rarefied dusty plasma in a normal glow discharge // High Temperature, September 2012, Volume 50, Issue 5, pp 571–578.
5. Сальянов Ф.А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий. М., Наука, 1997.240 с.
6. Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. Numerical modeling of the powder materials spraying // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 412, conference 1.
7. Fletcher, C.A., Computation Techniques for Fluid Dynamics/ C.A. Fletcher- Springer-Verlang, Berlin et al., 1988, 502 P.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 784 с.

# ONE-DIMENSIONAL NONSTATIONARY MODEL OF WAVE DYNAMICS OF THE DISPERSE STREAM IN THE ELECTRIC FIELD

**D.A. Tukmakov**
Cand. Sci. (Phys.–Math.)
tukmakovDA@imm.knc.ru
Kazan

The federal research center
"Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"

**Abstract.** In the paper is presented the mathematical model and numerical algorithm of the solution of the equation of mathematical model of dynamics of the electrically dispersion medium in the viscous compressed diathermic gas.
**Keywords:** mechanics of liquid and gas, multiphase environments, electric field, equation of Navier-Stokes.

**References.**

1. Kutushev A.G. Mathematicheskoe modelirovanie volnoveh processov v aerodispersneh i poroskoobraznih sredah [Mathematical model operation of wave processes in aero dispersion and powdery dispersion mediums] SPb.: Nedra, 2003, 284 pages.
2. Temkin, S. Suspension acoustics: An introduction to the physics of suspension /Cambridge University Press, 2005. 398p.
3. Bogomolova O. Yu., Danilayev M. P. Parametre techenia mnogofaznih gazoveh potokov v zadashe kapsulerovanea submekronnex chastets polimerom [Parameters of a current of polyphase gas streams in a problem of capsulation of submicronic particles polymer]//the Scientific and technical bulletin of the Volga region. 2016. No. 3. Page 25−27.
4. Dikalyuk A.S., Surzhikov S.T. Numerical simulation of rarefied dusty plasma in a normal glow discharge//High Temperature, September 2012, Volume 50, Issue 5, pp 571–578.
5. Salyanov F.A. Osnove fezeke nezkotemperaturne plazme, plazmenneh apparatov e tehnologee [Fundamentals of physics of the low-temperature plasma, plasma devices and technologies] M, Science, 1997. 240 with.
6. Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. Numerical modeling of the powder materials spraying// IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 412, conference 1.
7. Fletcher C.A., Computation Techniques for Fluid Dynamics, Springer-Verlang, Berlin et al., 1988, 502 P.
8. Loytsyansky, L.G. Mehanica jedkosti i gaza [Mechanic of liquid and gas] / M.: Drofa publishing house of.2003 g 784 p.

УДК 519.63:536.2

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ С ИМПУЛЬСНЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ НА ПОВЕРХНОСТИ

**Петрова Лилия Сергеевна**
к.п.н., доцент
petrov.306@mail.ru
г. Омск
Омский государственный университет путей сообщения

**Заец Евгений Валерьевич**
магистрант
zaetsevgenijmagistr@gmail.com
Омский государственный университет путей сообщения

**Аннотация.** В статье представлена математическая модель процесса теплопередачи в тканях кожи с импульсным тепловым потоком на поверхности. Получено численное решение нестационарной задачи теплопроводности на основе гиперболического уравнения теплопроводности, учитывающего конечную скорость распространения тепла и явление термического демпфирования. Описана реализация метода сеток с применением трехслойной неявной разностной схемы при решении задачи нестационарного теплопереноса в биологических тканях на основе уравнения с двухфазным запаздыванием. Представлены результаты расчетов температурных полей в тканях кожи по уравнению теплопроводности гиперболического типа с учетом явления тепловой релаксации и демпфирования температуры. Разработанная математическая модель с двухфазным запаздыванием может использоваться в экспериментальных и теоретических исследованиях процессов теплопереноса в тканях кожи.

**Ключевые слова:**математическая модель, численные методы, уравнение теплопроводности гиперболического типа, метод прогонки, биологическая ткань

Исследование процессов теплопередачи в биологических тканях является перспективным направлением в современной биотехнологии и физиологии, основанным на теоретических и экспериментальных исследованиях процессов теплового переноса в органах и тканях. Важное прикладное значение имеет проведение математического моделирования термических процессов для расчета температурных полей в биотканях.

Современными исследователями (А.П. Свиридов [4], М.В.Поляков [2], А.И. Жеребцова [1], А.Е. Пушкарева [3], H.Z. Poor, H. Moosavi, A. Moradi [6], K.C. Liu, P.J. Cheng, Y.N. Wang [5] и др.) для описания теплопередачи в биологических тканях разработано множество математических моделей, применяемых в различных областях биологии и медицины. При этом в исследовании А.И. Жеребцовой [1. с. 105], посвященном анализу и классификации наиболее распространенных математических моделей, описывающих взаимосвязь параметров кровоснабжения и температуры кожи, выделяются два основных подхода при построении моделей переноса биотепла (в континуальных моделях используется упрощенная запись биотепловых уравнений с усреднением кровоснабжения по исследуемому объему, дискретно-сосудистые модели основываются на совокупности биотепловых уравнений, описывающих кровоток в каждом сосуде).

Использование аналитических методов (метод разделения переменных, операционный метод) при решении задачи нестационарного теплопереноса в биологических тканях на основе уравнения теплопроводности гиперболического типа с учетом явления тепловой релаксации и демпфирования температурыописано в работах [5], [6] и в случае импульсного теплового потока на границе сопряжено с увеличением трудоемкости преобразований, что способствует применению численных методов решения. Описание использования численных методов при моделировании термических процессов для расчета температурных полей в биотканях на основе уравнения теплопроводности параболического типа представлено в исследованиях [2, 3, 4]. Исследований по тематике численного моделирования процесса теплопередачи в тканях кожи на основе уравнения с двухфазным запаздыванием нами не обнаружено.

Математическая модель процесса теплопередачи в тканях кожи с импульсным тепловым потоком на поверхности включает в себя гиперболическое уравнение теплопроводности с учетом явлений тепловой релаксации, термического демпфирования и метаболического тепловыделения в ткани [6, с. 1460, 1463]:

$$\rho c\left(\tau_q \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial \tau^2}+\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau}\right)+\rho_b c_b \varpi_b\left(\tau_q \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau}+\left(T-T_a\right)\right)=$$

$$=\lambda\left(\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}+\tau_T \frac{\partial^3 T(x,\tau)}{\partial x^2 \partial \tau}\right)+Q_{met}+\tau_q \frac{\partial Q_{met}}{\partial \tau},\ 0<x<L,\ 0<\tau\le\tau_m; \quad (1)$$

начальные условия:

$$T(x,\,0)=T_a, \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=0,\ x\in[0,\,L]; \quad (3)$$

условия на границах:

$$-\lambda\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0}=q_0\left(U(\tau)-U(\tau-\tau_i)\right), \quad (4)$$

$$\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ 0\le\tau\le\tau_m, \quad (5)$$

где $T(x,\,\tau)-$ температура ткани кожи в точке $x$ в момент времени $\tau$, $c-$ теплоемкость ткани, $\rho-$ плотность ткани, $\lambda-$ коэффициент теплопроводности ткани, $c_b-$ теплоемкость крови, $\rho_b-$ плотность крови, $\varpi_b-$ скорость перфузии крови, $\tau_q-$ время тепловой релаксации, $\tau_T-$ время термического демпфирования, $T_a-$ температура крови, $Q_{met}-$метаболическое тепловыделение в ткани ( $Q_{met}=\text{const}$), $q_0-$ плотность теплового потока, $U(\tau)-$ функция единичного скачка, $\tau_i-$ длительность импульса.

Для реализации метода сеток при решении задачи (1) – (5) использовалась прямоугольная пространственно-временная сетка

$$G_{x\tau}=\left\{x_i=h(i-1),\ i=\overline{1,N};\ \tau_j=jk,\ j=\overline{0,M}\right\}.$$

Разностное уравнение при использовании трехслойной неявной разностной схемы с применением соответствующих разностных аналогов частных производных первого и второго порядков по времени, производной второго порядка по пространству и смешанной производной третьего порядка имеет вид:

$$\rho c\left(\tau_q \frac{T_i^{j+1}-2T_i^j+T_i^{j-1}}{k^2}+\frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{k}\right)+\rho_b c_b \varpi_b\left(\tau_q \frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{k}+\left(T_i^{j+1}-T_a\right)\right)=$$

$$=\lambda\left(\frac{T_{i+1}^{j+1}-2T_i^{j+1}+T_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\tau_T \frac{T_{i+1}^{j+1}-T_{i+1}^j-2\left(T_i^{j+1}-T_i^j\right)+T_{i-1}^{j+1}-T_{i-1}^j}{h^2 k}\right)+Q_{met}, \qquad (6)$$

где $i=\overline{2,N-1},\ j=\overline{1,M-1}$.

В процедуре расчета значений сеточной функции на верхнем временном слое на этапе прямой прогонки используются формулы для определения прогоночных коэффициентов, при этом начальные прогоночные коэффициенты в соответствии с временным слоем определяются с использованием аппроксимации левого граничного условия с погрешностью $O\left(h^2\right)$:

$$\alpha_i=\frac{A_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_{i-1}},\ \beta_i=\frac{C_i\cdot\beta_{i-1}-F_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_{i-1}}. \qquad (7)$$

$$\alpha_1^{j+1}=\frac{2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}, \qquad (8)$$

$$\beta_1^{j+1}=\frac{2hk^2 q_0\left(U(kj)-U\left(kj-\tau_i\right)\right)+2\lambda\tau_T k\left(T_1^j-T_2^j\right)+h^2\rho c\left[T_1^j\left(2\tau_q+k\right)-T_1^{j-1}\tau_q\right]}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}+$$

$$+\frac{kh^2\left(\rho_b c_b \varpi_b\left(T_1^j\tau_q+kT_a\right)+kQ_m\right)}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)} \qquad (9)$$

$$\beta_1^1=\frac{2hk^2 q_0\left(U(kj)-U\left(kj-\tau_i\right)\right)+2\lambda\tau_T k\left(T_1^0-T_2^0\right)+h^2\rho c T_1^0\left(\tau_q+k\right)}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}+$$

$$+\frac{kh^2\left(\rho_b c_b \varpi_b\left(T_1^0\tau_q+kT_a\right)+kQ_m\right)}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}. \qquad (10)$$

где $A_i=C_i=\lambda k\left(k+\tau_T\right)$, $B_i=h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right), F_i=h^2\tau_q\rho c T_i^{j-1}+$

$$+\lambda k\tau_T\left(T_{i-1}^j+T_{i+1}^j\right)-T_i^j\left[2\lambda k\tau_T+h^2\left(\rho c\left(2\tau_q+k\right)+k\tau_q\rho_b c_b \varpi_b\right)\right]-k^2h^2\left(\rho_b c_b \varpi_b T_a+Q_{met}\right)$$

$$F_i^1=\lambda\tau_T k\left(T_{i-1}^0+T_{i+1}^0\right)-T_i^0\left[2\lambda\tau_T k+h^2\left(\rho c\left(\tau_q+k\right)+k\tau_q\rho_b c_b \varpi_b\right)\right]-k^2h^2\left(\rho_b c_b \varpi_b T_a+Q_{met}\right)$$

Вычисление значений температуры в узлах на верхнем временном слое на этапе обратной прогонки осуществляется с использованием основного соотношения прогонки и формул расчета значений температуры на правой границе, полученных с применением аппроксимации правого граничного условия с погрешностью $O\left(h^2\right)$:

$$T_N^{j+1}=\frac{h^2\rho c\left(\tau_q T_N^{j-1}-T_N^j\left(2\tau_q+k\right)\right)-kh^2\left(\rho_b c_b \varpi_b\left(\tau_q T_N^j+kT_a\right)+kQ_m\right)}{2\lambda k\left(\tau_T+k\right)\left(\alpha_{N-1}-1\right)-h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)}+$$

$$+\frac{2\lambda k\left(\tau_T\left(T_{N-1}^j-T_N^j\right)-\beta_{N-1}\left(\tau_T+k\right)\right)}{2\lambda k\left(\tau_T+k\right)\left(\alpha_{N-1}-1\right)-h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)}; \qquad (11)$$

$$T_N^1=\frac{-h^2\rho c T_N^0\left(\tau_q+k\right)-kh^2\left(\rho_b c_b \varpi_b\left(\tau_q T_N^0+kT_a\right)+kQ_m\right)}{2\lambda k\left(\tau_T+k\right)\left(\alpha_{N-1}-1\right)-h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)}+$$

$$+\frac{2\lambda k\left(\tau_T\left(T_{N-1}^0-T_N^0\right)-\beta_{N-1}\left(\tau_T+k\right)\right)}{2\lambda k\left(\tau_T+k\right)\left(\alpha_{N-1}-1\right)-h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b \varpi_b\right)}. \qquad (12)$$

Безусловная устойчивость применения метода прогонки при использовании предложенной неявной разностной схемой с погрешностью аппроксимации $O\left(k+h^2\right)$ обеспечивается выполнением условия $\left|\alpha_i\right|<1,\ i=\overline{1,N-1}$, исключающего быстрый рост погрешности округления и отличием знаменателей прогоночных коэффициентов от нуля.

Программа численного решения задачи (1) – (5) реализовывалась в системе MathCAD и в среде программирования Dev-C++. Результаты расчетов температурных полей с импульсным тепловым потоком на поверхности при $q_0=5000$ Вт/м$^2$, $\tau_i=20$ с (T1), $q_0=83200$ Вт/м$^2$, $\tau_i=1$с (T2) представлены в виде графиков распределения температуры при $x=0{,}1$ мм, $x=1{,}6$ мм на рисунке 1 при следующих значениях теплофизических и геометрических характеристик [5, с.65; 6, с. 1465 – 1466]: $T_a=37$ °C, $Q_{met}=368{,}1$ Вт/м$^3$, $L=6$ мм, $\tau_T=10$ с, $\tau_q=16$ с, $\lambda=0{,}235$ Вт/(м·К), $\rho=1190$ кг/м$^3$, $\rho_b=1060$ кг/м$^3$, $c=3600$ Дж/(кг·К), $c_b=3770$ Дж/(кг·К), $W_b=\rho_b\varpi_b=0{,}5$ кг/(м$^3$с).

Достоверность результатов обосновывается сопоставимостью полученных результатов с результатами расчетов, представленными в работе [6, с. 1466] с использованием аналитических методов на основе метода разделения переменных.

Представленная математическая модель с двухфазным запаздыванием и реализация численного решения задачи нестационарного теплопереноса в биологических тканях с импульсным тепловым потоком на поверхности позволяет повысить точность расчета температурных полей при исследовании процессов теплопередачи в тканях кожи и может применяться для разработки медицинских технологий при оптимизации параметров и выборе режима обработки.

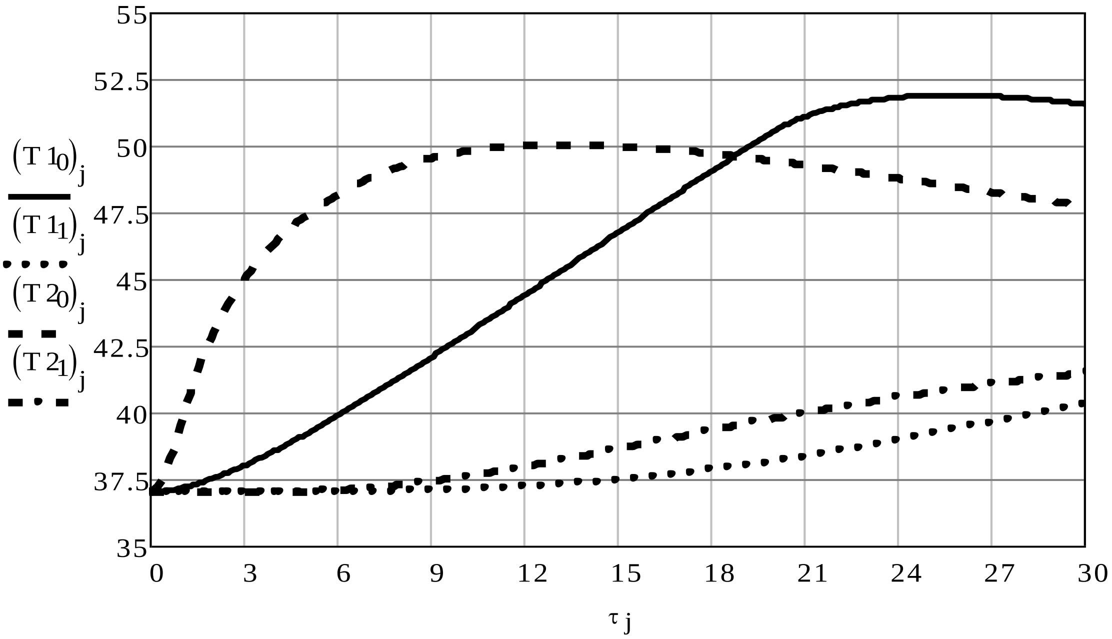



Рис. 1. Изменение температуры во времени:
при $x = 0{,}1$мм ($T1_0$, $T2_0$) и при $x = 1{,}6$мм ($T1_1$, $T2_1$)

**Список литературы**

1. Жеребцова А.И. (2015) Аналитический обзор математических моделей взаимосвязи параметров кровоснабжения и кожной температуры // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. № 5 (313). С. 104 -113.
2. Поляков М.В. (2015) Численное моделирование динамики распространения температуры в биологической ткани //XII Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами». С. 971 -978.
3. Пушкарева А.Е. (2008) Методы математического моделирования в оптике биоткани. Учебное пособие / А.Е. Пушкарева. СПб: Изд-во СПбГУ ИТМО. 103 с.
4. Свиридов А.П. (2015) Лазерно-индуцированные термопроцессы в соединительных тканях и их оптическая диагностика: дис ... д-р физ.-мат. наук. М. 280 с.
5. Liu K.C., Cheng P.J., Wang, Y.N. (2011) Analysis of non-Fourier thermal behavior for multi-layer skin model // Thermal Science. V. 15 (1). P. 61 - 67.
6. Poor H.Z., Moosavi H., Moradi A. (2016) Analysis of the DPL bio-heat transfer equation with constant and time-dependent heat flux conditions on skin surface // Thermal Science. V. 20. № 5. P. 1457 - 1472.

# NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF NONSTATIONARY HEAT TRANSFER IN BIOLOGICAL TISSUES WITH PULSED HEAT FLOW ON THE SURFACETITLE ARTICLE

**L.S. Petrova**
Cand. Sci. (Pedagogic), associate professor
petrov.306@mail.ru l
Omsk

Omsk State Transport University

**E.V. Zaets**
Undergraduate
zaetsevgenijmagistr@gmail.com
Omsk

Omsk State Transport University

**Abstract.**The article presents a mathematical model of the heat transfer process in skin tissues with pulsed heat flow on the surface. A numerical solution of the nonstationary heat conduction problem is obtained on the basis of the hyperbolic heat equation, which takes into account the finite rate of heat propagation and the effect of thermal damping. The implementation of the grid method using a three-layer implicit difference scheme for solving the problem of nonstationary heat transfer in biological tissues on the basis of the equation with dual phase lag is described. The results of calculations of temperature fields in skin tissues according to the hyperbolic thermal conductivity equation taking into account the effect of thermal relaxation and temperature damping are presented. The developed mathematical model with dual phase lag can be used in experimental and theoretical research of heat transfer processes in skin tissues.

**Keywords:**mathematical model, numerical methods, heat conduction equation of hyperbolic type, sweep method, biological tissues.

## References

1. ZHerebcova A.I. (2015) Analiticheskij obzor matematicheskih modelej vzaimosvyazi parametrov krovosnabzheniya i kozhnoj temperatury [Analytical review of mathematical models of interrelation of parameters of blood circulation and skin temperature] // Fundamental and Applied Problems of Technics and technology. № 5 (313), pp. 104 - 113.
2. Polyakov M.V. (2015) CHislennoe modelirovanie dinamiki rasprostraneniya temperatury v biologicheskoj tkani [Numerical modeling of the dynamics of temperature distribution in biological tissues] // "XII Vserossijskaya shkola-konferenciya molodyh uchenyh. Upravlenie bol'shimi sistemami", pp. 971 - 978.
3. Pushkareva A.E. (2008) Metody matematicheskogo modelirovaniya v optike biotkani. Uchebnoe posobie [Methods of mathematical modeling in biological tissue optics]/ A.E. Pushkareva. SPb: Izd-vo SPbGU ITMO. 103 p.
4. Sviridov A.P. (2015) Lazerno-inducirovannye termoprocessy v soedinitel'nyh tkanyah i ih opticheskaya diagnostika [Laser-induced thermal processes in connective tissues and their optical diagnostics]: Dis. d-r fiz.-mat. nauk. M. 280 p.
5. Liu K.C., Cheng P.J., Wang, Y.N. (2011) Analysis of non-Fourier thermal behavior for multi-layer skin model // Thermal Science. V. 15 (1). P. 61 - 67.
6. Poor H.Z., Moosavi H., Moradi A. (2016) Analysis of the DPL bio-heat transfer equation with constant and time-dependent heat flux conditions on skin surface // Thermal Science. V. 20. № 5. P. 1457 - 1472.

# НОВШЕСТВАФГОСИПЕДАГОГИЧЕСКИЕТЕХНОЛОГИИ ВОБУЧЕНИИМАТЕМАТИКЕИИНФОРМАТИКЕ

УДК372.851

## РАЗВИТИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ-БАКАЛАВРОВ ПО ОСВОЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В ЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ: СОЦИОКУЛЬТУРНЫЙ КОНТЕКСТ

**Подаева Наталия Георгиевна**
д.п.н., профессор
podaeva@mail.ru
г. Елец
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

**Жук Лариса Викторовна**
к.п.н., доцент
krasnikovalarisa@yandex.ru
г. Елец
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

**Аннотация. Актуальность исследования.** В условиях перехода от информационно-трансляционной модели школьного математического образования к личностно-деятельностной, направленной на формирование у обучающихся метапредметных умений и универсальных учебных действий, определяются повышенные требования к уровню профессиональной компетентности будущего учителя математики. Важнейшей ее составляющей является математическое мышление – сложная динамичная структура, особое место в которой принадлежит понятиям – форме мышления, отражающей общие и притом существенные свойства предметов и явлений. **Цель исследования** – разработка методики развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению научных понятий. Достижение цели возможно посредством решения задач: изучение психической структуры, обеспечивающей в ситуации обучения геометрии формирование понимания и способов действия с геометрическими понятиями; обоснование организационно-педагогических условий эффективного развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению научных понятий; определение уровней и показателей развития, разработка средств диагностики. **Методы исследования.** Дидактическим условием эффективности развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению геометрических понятий выступает специальным образом организованная учебная деятельность в сопровождении метода компьютерного моделирования и разработанная система заданий в рамках элективного курса «Решение задач аналитической и дифференциальной геометрии с применением компьютерных математических систем». Целевыми ориентирами курса являются раскрытие социальной, практической и личностной значимости предметного содержания, овладение учащимися знаниями о геометрической картине мира, образным восприятием действительности.**Результаты исследования.** Результаты анализа статистических данных подтверждают гипотезу о значимом положительном воздействии социокультурно-ориентированного обучения геометрии в вузе с применением компьютерных математических систем на уровень профессиональной компетентности будущих учителей математики. **Заключение.**Исследование выполнено в рамках стратегии обновления содержания математического образования в направлении социокультурной парадигмы. Представлены элементы технологии обучения геометрии будущих учителей математики, направленной на развитие мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению геометрических понятий посредством поэтапного решения психодидактических задач осознания, осмысления, обобщения. Содержащиеся в статье материалы могут быть внедрены в практику работы вузовских преподавателей геометрии, а также учителей профильных математических классов.

**Ключевые слова:**социокультурно-ориентированное обучение геометрии, мыслительная деятельность будущих учителей математики по освоению геометрических понятий, метод компьютерного моделирования.

## 1. Введение

В условиях перехода современной системы математического образования в России от информационно-трансляционной модели к деятельностной, направленной на личностное развитие обучающихся, формирование у них метапредметных знаний и универсальных учебных действий, определяются повышенные требования к уровню профессиональной компетентности бакалавра педагогического образования. Важнейшей составляющей профессиональной компетентности учителя математики является математическое мышление – сложная динамичная структура, особое место в которой принадлежит *понятиям* – форме мышления, отражающей общие и притом существенные свойства предметов и явлений. Учитель с развитым понятийным мышлением способен обеспечить высокий уровень геометрической подготовки, а также общей культуры школьников.По нашему мнению, решение проблемы развития математического мышления будущего бакалавра возможно на основе трансформации процесса обучения геометрии в вузе в механизм социокультурного развития личности. Под *социокультурным развитием* мы понимаем освоение субъектом-обучающимся содержания геометрических понятий на основе развёртывания ценностно-ориентационных, побудительных и коммуникативных механизмов процесса учения [17]. Познавательную деятельность студентов необходимо ориентировать на освоение культурных базовых способностей – мышления, понимания, рефлексии, воображения, учитывая психодидактические закономерности развития личности, формируя адекватную мотивацию, при которой объективно значимая цель учения становится субъективно значимой.

*Предметом* исследования является социокультурно-ориентированное обучение геометрии в вузе как среда для развития базовых способностей бакалавров педагогического образования. *Цель* исследования − разработка методики развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению научных понятий. Достижение цели возможно посредством решения *задач:* изучение психической структуры, обеспечивающей в ситуации обучения геометрии формирование понимания и способов действия с геометрическими понятиями; обоснование организационно-педагогических условий эффективного развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению научных понятий; определение уровней и показателей развития, разработка средств диагностики.

**2. Методы**

*Теоретические методы исследования* включают анализ психолого-педагогической литературы по теории развития личности – А.В. Асмолов, Б.Г. Ананьев, А.Н. Леонтьев и др. [1, 13], теории развития мышления – В.В. Давыдов, Е.Н. Кабанова-Меллер, И.Я. Лернер, С.Л. Рубинштейн, Н.Ф. Талызина, Д.Б. Эльконин и др. [7, 14, 20, 21, 25], по вопросам сущности и структуры пространственного компонента мыслительной деятельности – Г.Д. Глейзер, И.Я. Каплунович, В.А. Крутецкий, Ж. Пиаже, И.С. Якиманская и др. [5, 9, 26]; по проблеме формирования математических понятий – М.А. Холодная [23], Э.Г. Гельфман [4], С.А. Владимирцева и др.; анализ исследований, отражающих концепцию социокультурно-ориентированного обучения математике [18, С. 91-96.]; изучение нормативно-программной документации (стандартов, учебных планов) и методической литературы (учебники, учебные пособия по геометрии для вузов [2]). К *эмпирическим методам* относятся наблюдение, диагностика, сравнение, анализ и обобщение результатов.

В отечественной психологии понятие *деятельности* играет ключевую, методологически значимую роль. Деятельностный подход является основным при изучении закономерностей развития сознания и личности человека. Общепсихологическая теория деятельности развита в трудах С.Л. Рубинштейна, А.Н. Леонтьева, А.В. Брушлинского, Б.Г. Ананьева, В.Д. Шадрикова и др. Согласно определению В.Д. Шадрикова, деятельность – форма активного отношения к действительности, направленного на достижение сознательно поставленных целей, связанных с созданием общественно значимых ценностей и освоением общественного опыта [23]. Предметное содержание деятельности субъекта образуют *мотив, цель, условия* (способы достижения цели) и *задача* (цель, заданная в определенных условиях), в то время как структурными единицами деятельности являются *действия* и *операции* − способы осуществления действий в условиях достижения конкретной цели. Сложное действие, состоящее из совокупности операций, образует *приём деятельности*.

*Мыслительная деятельность* в исследованиях А.Н. Леонтьева, С.Л. Рубинштейна, Г.П. Щедровицкого представлена как особый вид теоретической деятельности, главной характеристикой которой выступает познавательная мотивация [12].

Обращаясь к понятию *«математическое мышление»*, следует отметить два ряда исследований: в первом описаны специфические характеристики данного вида мыслительной деятельности (В.А. Гусев, Ю.М. Колягин, А.Н. Колмогоров, В.С. Ротенберг и др. [6, 10, 19]), во втором представлены его структурные компоненты (Г.Д. Глейзер, И.Я. Каплунович, М.А. Незнамова [5, 9, 15]).

*Пространственное мышление* рассматривается как специфический вид мыслительной деятельности, имеющий место при решении геометрических, графических, конструктивно-технических задач, требующих оперирования образами, их трансформации и видоизменения, ориентации в пространстве (И.А. Бреус, И.Г. Вяльцева, Г.Д. Глейзер, И.Я. Каплунович, И.С. Якиманская [3, 5, 9, 26]). Основной оперативной единицей пространственного мышления является *образ*, в котором представлены преимущественно пространственные характеристики изучаемого объекта − форма, величина, взаимоотношение составляющих элементов, расположение их на плоскости или в пространстве относительно заданной точки отсчета. Этим пространственное мышление отличается от других форм образного мышления, в которых выделение пространственных характеристик не является центральным моментом. Структура пространственного компонента мыслительной деятельности в области геометрии включает ряд обобщённых приёмов, характеризующихся определённым составом мыслительных операций (таблица 1).

Таблица 1

*Характеристика обобщённых приёмов в структуре мыслительной деятельности по освоению геометрических понятий на уровне представлений*

| ***Уровни развития*** | ***Обобщённые приёмы*** | ***Состав приёма*** |
|---|---|---|
| *1.Образ восприятия (перцепт)* | *1. Создание первичного образа*,вкотором закреплены субъективно наиболее существенные признаки воспринимаемого объекта. | *Осознание:* структурирование наглядно воспринимаемого объекта – выделение отдельных элементов, пространственных и метрических соотношений фигуры как носителя понятия, её видовая идентификация. |
| *2.Обобщенное представление* | *2. Создание вторичного образа* в отсутствие наглядной основы. | *Обобщение* (типизация): образ освобождается от «прикованности» к единичному объекту и может быть обобщённым образом целого класса объектов. |
| *3. Предпонятие (образ-концепт)* | *3.Оперирование пространственным образом. Исходный образ, созданный на графической наглядной основе, видоизменяется в соответствии с условиями задачи.* | *Осмысление:* операции, соответствующие основным математическим преобразованиям – *параллельный перенос, поворот, центральная и осевая симметрия, симметрия относительно плоскости, гомотетия, параллельное и ортогональное проецирование.* |
| | Три типа (уровня) оперирования образами: | |
| | *3.1. Первый тип («движение»)* – изменение пространственного положения имеющегося в представлении образа. | Мысленные *вращения, перемещения образа посредством смены точки отсчёта.* |
| | *3.2. Второй тип («реконструкция»)* – изменение структуры имеющегося в представлении образа. | Мысленная перегруппировка составных элементов образа с использованием операций *наложения, совмещения, рассечения* и т.п. |
| | *3.3. Третий тип («композиция»)* – одновременное и неоднократное изменение пространственного положения и структуры исходного образа. | Цепь мыслительных операций, направленных на манипулирование образом, при котором возникает последовательность «промежуточных» образов. |
| | *4. Ориентация в пространстве* − определение местоположения или направления движения объекта в пространстве посредством внешних (визуальных) или внутренних (висцеральных, кинестетических) ориентиров. | Пространственная ориентация базируется на деятельности по созданию пространственных образов и на процессе оперирования ими. |

Исходя из представленной структуры, под *развитиеммыслительной деятельностибакалавров по освоению геометрических понятий* на уровне представлений мы понимаем совокупность изменений качественного и количественного характера, выражающихся в повышении уровня сформированности обобщённых приёмов пространственного мышления в условиях специальным образом организованной учебной деятельности.

В качестве педагогической среды, оптимальным образом сочетающей содержательные и организационные условия развития, мы рассматриваем социокультурно-ориентированное обучение геометрии в вузе, проектируемое в соответствии с основополагающими принципами социокультурного подхода. В русле данного подхода образование определяется как форма человеческой культуры, направленная на трансляцию и усвоение накопленного опыта, знания как носителей культурных ценностей [8]. При этом на первый план выступает мотивационно-ценностный компонент образования: лишь знание, наполненное личностным смыслом, оказывается в полной мере усвоенным субъектом образовательного процесса.

В рамках концепции социокультурно-ориентированного обучения геометрии учебно-познавательную деятельность бакалавров можно представить как системное образование, компоненты которого − ценностная ориентация, побуждение, коммуникация, адаптация, продуцирование − поэтапно отражают динамику этой деятельности [16]. На *этапе ценностной ориентации* осуществляется поиск смысла геометрических объектов, выявляются идеи, заложенные в фундаментальных понятиях, геометрическая терминология представляется как фрагмент общемирового искусственного языка. Тем самым у учащихся формируется ценностное отношение к геометрии как культурному образцу, развивается внутренняя мотивация к содержанию и процессу учения.На *этапе побуждения* мотивационный аспект усиливается межпредметностью геометрии и её прикладной направленностью: устанавливаются содержательные и методологические связи с другими науками, формируется умение видеть геометрические закономерности в повседневной практике. Основной целью *этапа коммуникации* является обеспечение обратной связи, рефлективного и эмоционального отношения путём передачи не только геометрической информации, но её значения, смысла с помощью символов. Ключевым фактором, обуславливающим эффективность социокоммуникативного процесса, является реализация психодидактических задач осознания, осмысления и обобщения содержания и процесса деятельности.

**3. Результаты исследования**

В психодидактике традиционно выделяют два уровня усвоения знаний: *уровень представлений* и *понятийный уровень*. В данной статье раскрывается сущность формирования деятельности студентов по овладению геометрическими понятиями на уровне представлений. Предполагается развитие **образно-пространственного** способа кодирования обучающимися информации, что требует использования нормативных образов и работы с ними, передачи в образных формах существенных характеристик геометрических объектов, активного преобразования наглядного или мысленного образа в соответствии с требованиями задачи, развития образа в ходе рассуждения, самостоятельного создания студентами визуальных моделей математических объектов и т.д.

В процессе развития деятельности по освоению геометрических понятий на уровне представлений у студентов-бакалавров формируются предпонятия. Формирование геометрических понятий и их систем обеспечивается в процессе развития деятельности на вербально-логическом уровне, что находится за рамками данной статьи.Анализ психологических исследований позволил выделить целостную психическую структуру, обеспечивающую в ситуации обучения геометрии формирование понимания и способов действия с геометрическими понятиями: *«Образ восприятия (перцепт) — обобщенное представление — предпонятие (образ-концепт) – понятие (вербально-логический уровень) — ценностное отношение»*. Схематично этапы ее развития представим в виде блоков, соответствующих уровням усвоения понятия. Содержание этапов определяется структурой деятельностной компоненты геометрических понятий, включающей как предметные действия, реализуемые «на вещах», так и целостные операции, которые «на вещах» не реализуются. В рамках данной статьи остановимся подробнее на первых трех блоках.

**Первый блок**: создание образа восприятия (перцепта). Ведущей является перцептивная деятельность на основе предметных действий с фигурами − вычерчивания, конструирования, представления в виде материального макета или трёхмерной компьютерной модели. Важно организовать подачу геометрической информации одновременно на двух кодах − вербальном и образном, что позволит преодолеть формализм в сложившейся практике обучения. Когда появление новых терминов сопровождается соответствующими ассоциативными образами, осуществляется так называемая «знаковая натурализация геометрических понятий», обусловленная психодидактической задачей *осознания*: аналитические рассуждения приобретают геометрический смысл, в результате достигается понимание обучающимся идеальной геометрической модели [22].При таком подходе, например, знакомство с эллипсом начинается с динамической визуализации процедуры его вычерчивания, позволяющей выявить основное свойство точек фигуры:

$$|MF_1|+|MF_2|=const.$$

На данном уровне усвоения понятия работает предметно-практический способ кодирования информации. (Наглядную опору для этого предоставляет, например, 3D-графика системы GeoGebra.) Такой тип действия закрепляет непосредственное восприятие чертежа. Имеет место «натурализация знания»: все сводится к «вещам» – материализуется, что, как уже говорилось, неверно для геометрии, негативно сказывается на ее теоретическом освоении. Как отмечает А.А. Устиловская, любая материализация идеального объекта уже не идеальный объект, а вещь. Поскольку геометрические объекты – не вещи, то материальные действия в отношении них невозможны [22]. Задача обучения геометрии – формирование самой идеальной действительности, особенностей понимания и способов действия с фигурами. В этой связи необходимо отметить, что феномен знаковой натурализации чертежа имеет негативное влияние на процесс усвоения геометрических понятий как теоретических. Причина в том, что условием перехода к теоретическому уровню геометрического мышления является преодоление знаковой натурализации – построение обучающимся пространства евклидовой геометрии как заданного специфическими характеристиками, не свойственными реальному, натуральному миру. Психологи условно выделяют три типа пространства: перцептивное, реальное и геометрическое. На первом уровне усвоения понятия предполагается, что студенты действуют в перцептивном пространстве, где работает ориентация «по схеме тела» (справа от себя, впереди себя), а также в реальном, опираясь на объективные земные ориентиры (горизонтальность, к югу, севернее …).

На этапе создания образов обучающиеся подготавливаются к мыслительному процессу оперирования образами. Следует отметить, что успешность оперирования образами не обеспечивается лишь освоением приемов создания пространственных образов. В процессе эксперимента определились две группы: студенты первой группы легко создавали пространственные образы по плоскому изображению, выполненному в аксонометрической проекции, однако испытывали трудности их мысленно преобразовывать, наглядную опору для них представляла 3D-графика системы GeoGebra; студенты второй группы свободно осуществляли мысленное оперирование образами и не нуждались в дополнительной наглядной опоре.

**Второй блок**: обобщенное представление. На этапе *формирования обобщённых представлений* происходит преодоление знаковой натурализации, обеспечиваемое психодидактической задачей *обобщения (типизации)*. Учащийся осваивает способы оперирования чертежом, позволяющие трансформировать, видоизменять имеющиеся в представлении образы, ориентироваться в пространстве, тем самым мысленно воссоздавая характеристики геометрического объекта, фиксированные в чертеже как в знаке-символе. На данном уровне усвоения понятия предполагается, что студенты действуют в геометрическом пространстве с постоянно меняющейся системой отсчета, причем названия геометрических фигур, их элементов не зависят от расположения относительно земной поверхности. Если, например, попробовать осознать («прорефлексировать») образ тетраэдра, который возникает у обучающегося в идеальном плане, то этот образ нельзя материализовать как плоское изображение. Скорее, пирамида видится как бы одновременно со всех сторон, то есть происходит выход в пространство с постоянно меняющейся точкой отсчета. Основание пирамиды определяется не тем, что на нем «стоит» фигура, а связями (отношениями) между ее элементами. Умение переходить от точки отсчета, сосредоточенной в наблюдателе, к пространству с постоянно меняющейся точкой отсчета С.Л. Рубинштейн назвал «стержнем общего понимания пространства». Таким образом, работа в геометрическом пространстве требует создания и оперирования образами геометрических объектов и осознания отличия идеального геометрического пространства от материально-предметного – реального и перцептивного [20]. Здесь необходимо преодоление знаковой натурализации – так называемая денатурализация, обеспечиваемая процессами осознания, обобщения и осмысления содержания и процесса деятельности. Геометрические понятия не являются абстракциями, полученными в результате эмпирического обобщения. Следовательно, оперирование геометрическими понятиями не может быть производным от предметных действий. Нужен другой тип операций – операции, не сводящиеся к действию.

Таким образом, поскольку геометрические объекты – не вещи, поскольку они не могут быть фиксированы в вещах, они «схватываются» и «удерживаются» в образах, постольку преодоление натурализации предполагает принципиально другой (по сравнению с предметным действиями) способ восприятия изображений геометрических фигур – операциональный, суть которого в мысленном воссоздании характеристик представленного геометрического объекта, фиксированных в изображении как в знаке-символе. Для преодоления знаковой натурализации необходимо осознание учеником символической функции чертежа и освоение способов оперирования с чертежом как со сложным семиотическим объектом. Уникальные дидактические средства для формирования геометрических понятий на данном уровне предоставляет динамическая система GeoGebra, главной характерной чертой которой является возможность построения динамических чертежей – геометрических 3D-конструкций, которые можно варьировать при сохранении алгоритма их построения посредством изменений параметров. Достоинства программы – моментальное изменение конфигурации при изменении определенных начальных характеристик. Это дает возможность осуществлять геометрические построения на компьютере так, что при изменении одного из геометрических объектов другие также изменяются, удерживая установленные между собой соответствия постоянными.

**Третий блок**: предпонятие (образ-концепт). Использование интерактивной геометрической среды обеспечивает легкость и быстроту взаимосвязанных процессов создания пространственного образа и оперирования им — то есть его переработки (мысленного видоизменения, преобразования) в зависимости от поставленной задачи. Основой каждого из этих мыслительных процессов служит деятельность представливания. При этом не следует априори относить создание образа к репродуктивному типу деятельности, а оперирование образом, при условии абстрагирования от исходной наглядности, — к продуктивным процессам, так как деятельность представливания носит преобразующий характер в обоих случаях. В процессе создания пространственного образа мысленно преобразуется исходная наглядная опора. В процессе оперирования образом мысленно трансформируется сам образ в условиях полного абстрагирования от наглядности. И все же основную функцию пространственного мышления психологи видят в свободном оперировании пространственными образами, созданными на различной наглядной основе.

Использование динамической системы GeoGebra позволяет организовать деятельность по оперирование образами при обучении геометрии, удовлетворяющую следующим критериям:

1. Богатство и своеобразие пространственных образов, возникающих на динамической наглядной основе основе 3D-графики.

2. Качественное своеобразие деятельности представливания в процессе оперирования пространственными образами. Содержание деятельности, благодаря возможностям динамической среды GeoGebra, включает как предметные действия, реализуемые на вещах, так и целостные операции, которые на вещах не реализуются.

Методика развития деятельности студентов-бакалавров по освоению геометрических понятий на уровне представлений реализована в рамках элективного курса *«Решение задач аналитической и дифференциальной геометрии с применением компьютерных математических систем»*. Целевыми ориентирами курса выступают раскрытие социальной, практической и личностной значимости предметного содержания, овладение обучающимися знаниями о геометрической картине мира, образным и целостным восприятием действительности.

Формирование *ценностного отношения* к геометрическим понятиям обеспечивается посредством изложения предметного содержания в контексте мировой и национальной культуры. Например, введение понятия «естественный трёхгранник кривой» сопровождается знакомством студентов с именем французского математика, профессора Лионского университета Жана Фредерика Френе (19 в), нашедшего соотношения между направляющими косинусами касательной, нормали и бинормали. Иллюстрируется последующее развитие метода трёхгранника Г. Дарбу, Л. Эйлером, Э. Картаном, приводящее к его приложениям в дифференциальной геометрии, геометрической оптике (законы преломления и отражения световых лучей) и механике (реакции материальной точки, движущейся по гладкой линии).

Реализация этапа побуждения осуществляется в рамках элективного курса содержательными и методическими средствами по двум основным линиям. *Историчность* обеспечивается посредством культурно-исторического дискурса − вовлечения в учебный процесс сведений об объектах, входящих в культурно-историческую зону. Так, линии второго порядка − эллипс, парабола, гипербола – представлены как результат сечения прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину, при решении Менехмом (4 в. до н. э.) знаменитой задачи об удвоении куба. *Прикладная направленность* геометрии иллюстрируется на примерах решения различных практических задач. В частности, показывается связь возникновения понятия конформного отображения с запросами математической картографии: использование стереографической проекции Птолемеем (2 в н.э.) в его

«Географии», Герхардом Кремером (1569 г.) при создании одной из первых карт мира. Демонстрируются приложения конформных отображений в кристаллографии и геологии при решении задач определения углов падения и простирания пластов, ориентации горных выработок, наклонных буровых скважин.

Важно добиваться понимания будущими бакалаврами того, что геометрический взгляд на мир пронизывает всю современную математику: геометрические идеи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений привели к созданию теории динамических систем; в теории уравнений в частных производных – к микролокальному анализу; в вариационном исчислении – к теории геодезических потоков. Современная физика также теснейшим образом связана с геометрией: классическая механика использует язык и методы римановой геометрии, в квантовой механике используется комплексная геометрия и геометрия гильбертовых пространств. Геометрические образы издавна использовались в изобразительном искусстве и архитектуре (Леонардо да Винчи, Дюрер, Дезарг, Монж и др.). Геометрия перспективы и начертательная геометрия выступают основными инструментами современных художников, архитекторов и дизайнеров. 3D-технологии, в основе которых лежат проективная и вычислительная геометрия, используются в кино и телевидении.

Дидактическим условием эффективности этапа социокультурной коммуникации выступает специальным образом организованная учебная деятельность и последовательность заданий, восходящая от простых преобразований образа с опорой на восприятие к все более сложным типам оперирования, осуществляемым в уме.

В качестве содержательного материала курса отобраны ключевые разделы аналитической и дифференциальной геометрии линий и поверхностей, структурированные согласно принципам модульности и интеграции с основной образовательной программой: задачи на вывод уравнений и построение плоских линий и поверхностей, на исследование их взаимного расположения, преобразование и моделирование. Указанные задачи, структурированные с учётом преемственности знаний, получаемых в ходе их решения, повышения сложности алгоритмов и ситуации неопределённости, представлены в учебном пособии [11].

*Задачи на формирование образа* предполагаютсоздание графической и компьютерной модели изучаемого объекта, выделение его существенных свойств, переход от первичного образа к представлению. Уровень развития мыслительной деятельности характеризуется такими критериями, как *полнота образа* (количество выделенных объектов, выразительных деталей, единых связей между признаками), *оригинальность* (новизна, яркость, ёмкость образа), *гибкость* (число переключений с одного класса объектов на другой), *ассоциативность* (наличие близких и далёких ассоциаций, возникающих у учащихся). Контроль за динамикой уровня развития осуществляется на основе показателей, к которым мы отнесли умения анализировать существенные признаки фигуры, её пространственные и метрические соотношения, мысленно группировать отдельные элементы фигуры, вычленять данные и искомые элементы, определять фигуру как носитель понятия.

Решение *задач на оперирование образом* требует изменения положения геометрического объекта в пространстве, а также его структуры. Выполнение подобных действий осуществляется в воображении: учащийся мысленно отвлекается от объекта, прослеживает его преобразования и воплощает новый образ в соответствии с заданными условиями. Критериями сформированности умения оперировать образамивыступают *широта оперирования* (возможность выполнять преобразования на различном графическом материале) и *свобода оперирования*, проявляющаяся в лёгкости и быстроте перехода от одного графического изображения к другому, без привязанности к конкретной точке отсчёта.

Уровень трудности *задач на ориентацию в пространстве* определяется возможностью выбора точки отсчёта: учащийся либо выбирает её самостоятельно, либо решает задачу с заданной извне начальной точкой. Наиболее трудным является способ ориентации в пространстве при произвольно и постоянно меняющейся точке отсчёта, характерный для высокого уровня развития мышления, обеспечивающего полное понимание геометрического пространства.

Базовыми *средствами обучения* в рамках элективного курса по геометрии выступают образовательные технологии смешанного типа, интегрирующие традиционное обучение и компьютерные программы, реализующие статические и динамические интерпретации модельных представлений геометрических объектов и связей между ними. Компьютерные математические системы (Axiom, Maxima, Scilab) обеспечивают технологически единую обработку задач геометрической направленности при задании условий на языке пользователя. Они имеют инновационную структуру и способствуют развитию интеллектуального потенциала обучающихся в результате интеграции доступности, запоминаемости, интерактивности.

Развивающий потенциал компьютерных математических систем как средства обучения геометрии мы видим в реализации *метода компьютерного моделирования*, основанного на поиске, отображении в моделях и анализе сущностных характеристик геометрических объектов. Создание образа обеспечивается возможностью визуализировать объект, заданный в знаково-символической форме, наблюдать его в динамике посредством перехода из графического режимав символьный (рис. 1).

Оперирование образом осуществляетсяпосредством изменения положения объекта в пространстве при неподвижности точки наблюдения, а также в процессе изменения параметров компьютерной модели.

Ориентация в пространстве обеспечивается возможностью изменения точки обзора в режиме реального времени. Так, решая задачу по теме «Сопровождающий трёхгранник кривой», студенты выполняют построение заданных геометрических объектов и наблюдают их взаимное расположение с помощью функции вращения *RealTime* (рис. 2).

Базовой формой организации учебной деятельности бакалавров, ориентированной на развитие мыслительной деятельности по освоению понятий, выступает лабораторной практикум по решению геометрических задач. Преимущество лабораторных занятий мы видим в интеграции теоретико-методологических знаний, практических умений и навыков студентов в едином процессе деятельности учебно-исследовательского характера. В рамках элективного курса по геометрии реализуются следующие дидактические функции лабораторного практикума: мотивационно-стимулирующая – развитие познавательного интереса посредством включения студентов в продуктивную деятельность по исследованию и преобразованию компьютерных моделей геометрических объектов; обучающая – оптимизация процесса усвоения геометрических знаний (закрепление, углубление, расширение, систематизация, применение метода компьютерного моделирования как средства исследования задачи); развивающая – развитие пространственного компонента мышления на основе взаимодополнительности аналитического и синтетического метода изложения материала; рефлексивная – осознание студентом себя как субъекта деятельности, формирование у него потребности анализировать, контролировать и корректировать свои действия, оценивать их результаты.

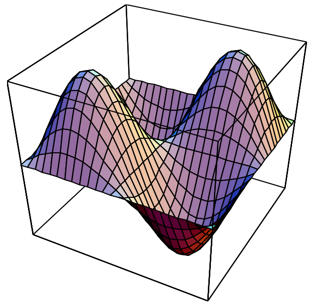


Рис. 1. *Поверхность, имеющая седловую точку*

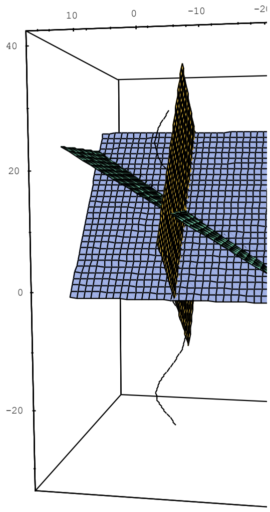



Рис. 2. *Сопровождающий трёхгранник кривой*

**4. Обсуждение результатов**

Разработка теоретических основ позволила провести экспериментальное исследование, выявить критерии и уровни развития мыслительной деятельности бакалавров педагогического образования по освоению понятий, определить факторы, влияющие на эффективность формирования обобщенных приёмов мышления.Опытно-экспериментальная работа по апробации технологии социокультурно-ориентированного обучения геометрии осуществлялась на базе института математики, естествознания и техники Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. Участниками эксперимента выступали студенческие группы физико-математического профиля, проходящие обучение в рамках элективного курса «Решение задач аналитической и дифференциальной геометрии с применением компьютерных математических систем». Целью проводимого эксперимента являлась оценка динамики уровня развития мыслительной деятельности, проявляющейся в качественном и количественном изменении мотивационных и операциональных характеристик.

Таблица 2

*Динамика развития ценностного отношения к геометрии у учащихся экспериментальной группы (чел.)*

| *Уровень* | *Экспериментальная группа* | |
|---|---|---|
| | До экспериментального обучения | После экспериментального обучения |
| Низкий | 8 | 3 |
| Средний | 7 | 6 |
| Высокий | 2 | 8 |

В качестве параметра, характеризующего *личностный уровень*развития, рассматривалось ценностное отношение. Результаты диагностики данного показателя до и после экспериментального обучения, отраженные в таблице 2, свидетельствуют об устойчивом повышении интереса студентов-бакалавров к геометрии в условиях реализации социокультурного подхода и методического сопровождения обучения в компьютерной среде.

Для определения предметного уровня развития пространственного компонента мыслительной деятельности бакалавров были проведены констатирующий (до обучения) и контрольный (после обучения) срезы с использованием разработанных диагностических заданий (таблица 3). Задания ориентированы на проверку умений создавать чертёж или компьютерную модель, осуществлять преобразования исходного образа (вращение, наложение, совмещение и т. п.), передавать в образе не только форму и размеры объекта, но и динамику пространственной размещённости его элементов, произвольно изменять точку отсчёта.

Таблица 3

*Диагностические задания для оценки предметного уровня развития мыслительной деятельности по освоению геометрических понятий*

| **Оценка уровня «создание образа восприятия - обобщенное представление»** | | |
|---|---|---|
| ***Низкий*** | ***Средний*** | ***Высокий*** |
| Умение создавать двумерные и трёхмерные образы объектов по аналитическому выражению или конструктивному описанию – выполнять чертёж или компьютерную модель. Образы характеризуются статичностью и фрагментарностью, гибкость и оригинальность мышления не проявляются. *Окружность радиуса R=5 проходит через полюс, ее центр лежит на полярной оси. Составить уравнение и построить эту окружность в полярной системе координат.* | Умение создавать двумерные и трёхмерные образы объектов, дополнять чертёж или компьютерную модель новыми элементами в соответствии с заданными условиями, верно отражать их форму и величину.Образы статичны, но целостны, в некоторых случаях оригинальны, имеют выразительные детали. *В репере* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *заданы уравнения гиперболы* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *и прямой* $y=kx+m$. *При каком необходимом и достаточном условии прямая* *1) касается гиперболы;* *2) пересекает гиперболу;* *3) не имеет с гиперболой общих точек?* | Умение создавать двумерные и трёхмерные образы объектов, дополнять чертёж или компьютерную модель новыми элементами, верно отражать их форму и величину, а также пространственную размещённость относительно заданной системы отсчёта. Образы целостны, разнообразны, оригинальны, проявляются быстрота, гибкость мышления, происходит «оживление» объектов. *Найти уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы* $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$ *вокруг 1) оси Ox, 2) оси Oz.* |

| **Оценка уровня «предпонятие (образ-концепт»)** | | |
|---|---|---|
| ***Низкий*** | ***Средний*** | ***Высокий*** |
| Умение изменять пространственне положение имеющихся в представлении образов – выполнять их перемещение, не затрагивая структурных особенностей. *Найти образ параболы* *1) при повороте на 90, на -90* *2) при композиции поворота с центром в начале координат на угол 90 и параллельного переноса a=(m,n).* Самостоятельный выбор точки отсчёта. *Найти геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки F плоскости (фокуса) равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой d (директрисы), не проходящей через фокус.* | Умение изменять не только положение исходного образа в пространстве, но и его структуру, строение.Проявляется широта оперирования образами, выражающаяся в свободе использования различных изображений. *Найти коэффициент сжатия, переводящего эллипс* $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ *в окружность; указать количество решений задачи и изобразить эти решения.* Решение задачи с объективно заданной точкой отсчёта. *Построить параболу в прямоугольной системе координат и найти её параметр, если в этой системе заданы координаты фокуса F(4 2) и уравнение директрисы x+3y-6=0.* | Умение изменять исходный образ по пространственному положению и по структуре одновременно, неоднократно. *Преобразованием какой поверхности получается эллипсоид* $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}+\frac{(z-1)^2}{9}$ *при параллельном переносе на вектор* $\vec{a}(1,2,3)$ *и трех последовательных сжатиях пространства к координатным плоскостям, если коэффициент сжатия к Oxy равен 3/4, к плоскости Oxz равен 4/5, к плоскости Oyz равен 3/4?* Решение задачи при произвольно меняющейся точке отсчёта. *В прямоугольной системе координат и найти линию, образованную движущейся точкой M(x,y,z), которая равномерно вращается вокруг оси Oz и одновременно перемещается параллельно оси Oz.* |

Для эмпирического исследования необходимо, чтобы выделенные уровни развития мыслительной деятельности обладали категорией меры. В связи с этим была построена порядковая шкала оценки уровней, сопоставляющая каждому качественному показателю (мыслительному умению) количественный показатель (балл). Показателям низкого, среднего и высокого уровней были присвоены соответственно 1, 2 и 3 балла, что позволило определить в экспериментальной группе процент студентов, имеющих тот или иной уровень пространственного мышления. Результаты диагностического среза представлены в таблице 4. Очевидно, на начальном этапе обучения в экспериментальной группе достаточно высок процент студентов с низким и средним уровнем пространственного мышления.

*Таблица 4*

*Уровни развития пространственного компонента мыслительной деятельности до начала экспериментального обучения (%)*

| *Низкий* | *Средний* | *Высокий* |
|---|---|---|
| 39 | 59 | 2 |

В течение семестра реализовывалась технология социокультурно-ориентированного обучения геометрии, ориентированная на развитие пространственного компонента мыслительной деятельности будущих бакалавров. Результаты контрольного среза, проведённого после изучения курса, отражены в таблице 5.

*Таблица 5*

*Уровни развития пространственного компонента мыслительной деятельности после экспериментального обучения (%)*

| *Низкий* | *Средний* | *Высокий* |
|---|---|---|
| 23 | 65 | 12 |

Для сравнения уровня развития пространственного компонента мыслительной деятельности до и после экспериментального обучения был использован Т-критерий Вилкоксона (таблица 6), позволяющий сопоставлять показатели, измеренные в разных условиях на одной и той же выборке. Были выдвинуты гипотезы:

$H_0$ – интенсивность сдвигов в сторону понижения уровня развития пространственного мышления не превышает интенсивности сдвигов в сторону повышения;

$H_1$ – интенсивность сдвигов в сторону понижения уровня развития пространственного мышления превышает интенсивность сдвигов в сторону повышения.

*Таблица 6*

*Расчет Т-критерия Вилкоксона*

| *Номер испытуемого* | *Количество баллов за констатирующий срез $C_1$* | *Количество баллов за контрольный срез $C_2$* | $\Delta = \left\| C_1 - C_2 \right\|$ | *Ранговый номер* $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 34 | 38 | 4 | 6,5 |
| 2 | 50 | 53 | 3 | 5 |
| 3 | 45 | 46 | 1 | 2 |
| 4 | 32 | 42 | 10 | 15 |
| 5 | 18 | 27 | 9 | 13,5 |
| 6 | 50 | 48 | 2 | 3,5 |
| 7 | 16 | 24 | 8 | 12 |
| 8 | 30 | 23 | 7 | 10,5 |
| 9 | 24 | 29 | 5 | 8 |
| 10 | 22 | 20 | 2 | 3,5 |
| 11 | 20 | 26 | 6 | 9 |
| 12 | 39 | 51 | 12 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 36 | 50 | 14 | 17 |
| 14 | 49 | 45 | 4 | 6,5 |
| 15 | 16 | 23 | 7 | 10,5 |
| 16 | 19 | 28 | 9 | 13,5 |
| 17 | 46 | 46 | 0 | 1 |

Сумма рангов нетипичных (отрицательных) сдвигов составляет эмпирическое значение критерия Т: $T_{эмп} = \sum R_{"-"} = 24$. По таблице критических значений критерия Вилкоксона определяем критическое значение *T* для *n=17*. При уровне значимости 0,05 $T_{кр.} = 41$, а при уровне значимости 0,01 $T_{кр.} = 27$. Известно, что типичный (положительный) сдвиг является достоверно преобладающим по интенсивности, если $T_{эмп} \le T_{0,05}$, и тем более достоверно преобладающим по интенсивности, если $T_{эмп} \le T_{0,01}$. В нашем случае $T_{эмп} \le T_{0,01}$, следовательно, сдвиг уровня развития пространственного компонента мыслительной деятельности в сторону увеличения является достоверно преобладающим.

**5. Заключение**

Проведённое исследование позволяет сформулировать следующие выводы.

1. Установлено, что социокультурно-ориентированное обучение геометрии студентов-бакалавров педагогического образования в электронной образовательной среде вуза способствует эффективному формированию мыслительной деятельности по освоению научных понятий на следующих уровнях: *низкий*, свидетельствующий об освоении умений выполнять чертёж или компьютерную модель, изменять пространственное положение имеющегося в представлении образа, самостоятельно выбирать точку отсчёта; *средний*, сигнализирующий о сформированности умений дополнять чертёж или компьютерную модель новыми элементами в соответствии с заданными условиями, изменять структуру имеющегося в представлении образа, решать задачи с объективно заданной точкой отсчёта; *высокий*, соответствующий способности одновременно изменять пространственное положение и структуру имеющегося в представлении образа, решать задачи при произвольно меняющейся точке отсчёта.

2. Развитая мыслительная деятельность по освоению геометрических понятий обеспечивает формирование умений по решению задач, требующих преобразования исходных образов, созданных на различной графической основе, а также ориентации в практическом и теоретическом пространстве. Основными качественными показателями, характеризующими уровень развития мыслительной деятельности по освоению понятий на уровне представлений, являются полнота образа, тип оперирования образом, широта оперирования, используемая система отсчёта (пространственная ориентация «от себя», от заданной базы, от произвольной точки). Специфика развития мыслительной деятельности может быть определена следующим образом: *на этапах создания образа восприятия и формирования обобщённых представлений* происходит знаковая натурализация геометрических понятий посредством предметных действий с фигурами, на основе взаимодополнительности аналитического и синтетического методов подачи информации решается психодидактическая задача осознания; *на этапе формирования предпонятия (образа-концепта)*осваиваются способы оперирования чертежом и ориентации в пространстве, в результате преодоления знаковой натурализации решается психодидактическая задача осмысления.

3. Диагностика предметного уровня развития мыслительной деятельности показала довольно интенсивную динамику у респондентов экспериментальной группы: заметный рост высокого (на 10%) и среднего (на 6%) уровней при снижении низкого (на 16%) уровня. Таким образом, социокультурно-ориентированное обучение геометрии в вузе с применением компьютерных математических систем оказывает положительное воздействие на уровень профессиональной компетентности будущих учителей математики.

Пролонгация эксперимента позволит достигнуть более высокого результата в развитии личностных и предметных результатов сформированности мыслительной деятельности у бакалавров педагогического образования.

**Список литературы**


1. Асмолов А.Г. (1990) Психология личности. М.: МГУ.
2. Атанасян С.Л., Покровский В.Г., Ушаков А.В. (2015) Геометрия. В 2 ч. Бином. Лаборатория знаний.
3. Бреус И.А. (2002) Развитие пространственного воображения будущих учителей математики в процессе их геометрической подготовки: Дис….канд. пед. наук. Ростов н/Д.
4. Гельфман Э.Г., Холодная М.А. (2006) Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся. СПб.: Питер.
5. Глейзер Г.Д. (1978) Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии. М.: Педагогика.
6. Гусев В.А. (2003) Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия».
7. Давыдов В.В. (2003) Новый подход к пониманию структуры и содержания деятельности // Вопросы психологии. №2. С.42-49.
8. Добреньков В.И., Нечаев В.Я. (2003) Общество и образование. М.: ИНФРА-М.
9. Каплунович И.Я. (1996) Развитие пространственного мышления школьников в процессе обучения математике. Новгород, НРЦРО.
10. Колягин Ю.М. (1977) Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение.
11. Красникова Л.В. Подаева Н Г. (2006) Лабораторно-практическиезанятияпо решению геометрических задач с применением пакета Mathematica: учебно-методическое пособие. Елец ЕГУ им. И А Бунина.
12. Леонтьев А.Н. (2004) Деятельность. Сознание. Личность.М.: Смысл; Академия.
13. Леонтьев А.Н. (2000) Лекции по общей психологии. М.: Смысл.
14. Лернер И.Я. (1974) Проблемное обучение. М.: Знание.
15. Незнамова М.А. (2004) Развитие математического мышления студентов университета: Дис.... канд. пед. наук. Оренбург.
16. Подаева Н.Г. (2012) Социокультурная концепция математического образования: монография. Елец: ЕГУ им. И А Бунина.
17. Подаева Н.Г., Подаев М.В. (2014) Обновление содержания школьного математического образования: социокультурный подход: монография. Санкт-Петербург: Лань.
18. Подаева Н.Г., Подаев М.В., Масина О.Н.Социокультурно-ориентированное обучение математике в общеобразовательной школе: структурно-функциональные компоненты//Психология образования в поликультурном пространстве. 2017. № 37 (1). С. 91-96.
19. Роттенберг В.С., Аршавский В.В. (1984) Поисковая активность и адаптация. М.
20. Рубинштейн С.Л. (1999) Основы общей психологии. СПб: ЗАО «Изд-во

«Питер».
21. Талызина Н.Ф. (1984) Управление процессом усвоения знаний (психологические основы). М.: Изд-во Моск. ун-та.
22. Устиловская А.А. (2008) Психологические механизмы преодоления знаковой натурализации идеального содержания геометрических понятий: Дис. ...канд. псих. наук. М.
23. Холодная М.А. (2002) Психология интеллекта. Парадоксы исследования. СПб.: Питер.
24. Шадриков В.Д. (1996) Психология деятельности и способности человека: учебное пособие. М.: Издательская корпорация «Логос».
25. Эльконин Д.Б. (1989) Избранные психологические труды. М.
26. Якиманская И.С. (1980) Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика.

# THE DEVELOPMENT ACTIVITIES OF UNDERGRADUATE STUDENTS DEVELOPMENT OF GEOMETRICAL CONCEPTS IN E-LEARNING ENVIRONMENT: A SOCIAL AND CULTURAL CONTEXT

**N.G. Podaeva**
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
podaeva@mail.ru
Yelets
Bunin Yelets State University

**L.V. Zhuk**
Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor
krasnikovalarisa@yandex.ru
Yelets
Bunin Yelets State University

**Abstract.Relevance of the study.** In the transition from information-translational model of school mathematical education to personal activity, aimed at the formation of students ' metasubject skills and universal educational actions, determined by the increased requirements for the level of professional competence of the future teacher of mathematics. Its most important component is mathematical thinking-a complex dynamic structure, a special place in which belongs to the concepts - a form of thinking that reflects the General and, moreover, the essential properties of objects and phenomena. **The aim of the research** is to develop a methodology for the development of mental activity of future teachers of mathematics for the development of scientific concepts. Achieving the goal is possible through the solution of tasks: the study of mental structure, providing in the situation of learning geometry formation of understanding and methods of action with geometric concepts; substantiation of organizational and pedagogical conditions for the effective development of mental activity of future teachers of mathematics for the development of scientific concepts; determination of levels and indicators of development, development of diagnostic tools. **Method of research.** Didactic condition for the effectiveness of the development of mental activity of future teachers of mathematics for the development of geometric concepts is a specially organized educational activity, accompanied by the method of computer modeling and developed a system of tasks in the framework of the elective course "Solving problems of analytical and differential geometry using computer mathematical systems." The objectives of the course are the disclosure of social, practical and personal significance of the subject matter, the mastery of students 'knowledge of the geometric picture of the world, the imaginative perception of reality. **Research result.** The results of the analysis of statistical data confirm the hypothesis of a significant positive impact of socio-cultural-oriented teaching geometry in high school with the use of computer mathematical systems on the level of professional competence of future teachers of mathematics. **Conclusion.** The research is carried out in the framework of the strategy of updating the content of mathematical education in the direction of socio-cultural paradigm. Elements of the technology of teaching geometry to future teachers of mathematics, aimed at the development of mental activity of future teachers of mathematics for the development of geometric concepts through a phased solution of psychodidactic problems of awareness, understanding, generalization. The materials contained in the article can be introduced into the practice of University teachers of geometry, as well as teachers of specialized mathematical classes.

**Keywords:** socio-cultural-oriented teaching of geometry, mental activity of future teachers of mathematics on the development of geometric concepts, the method of computer modeling.

**References**

1. Asmolov A.G. (1990) Psihologiya lichnosti[Psychology of Personality]. M.: MGU.
2. Atanasyan S.L., Pokrovskij V.G., Ushakov A.V. (2015) Geometriya. V 2 ch. [Geometry] Binom. Laboratoriya znanij.
3. Breus I.A. (2002) Razvitie prostranstvennogo voobrazheniya budushchih uchitelej matematiki v processe ih geometricheskoj podgotovki [Development of spatial imagination of future teachers of mathematics in the process of their geometric training]: Dis….kand. ped. nauk. Rostov n/D.
4. Gel'fman EH.G., Holodnaya M.A. (2006) Psihodidaktika shkol'nogo uchebnika. Intellektual'noe vospitanie uchashchihsya [Psychodidactic school textbook. Intellectual education of students]. SPb.: Piter.
5. Glejzer G.D. (1978) Razvitie prostranstvennyh predstavlenij shkol'nikov pri obuchenii geometrii [The development of spatial representations of schoolchildren in teaching geometry]. M.: Pedagogika.
6. Gusev V.A. (2003) Psihologo-pedagogicheskie osnovy obucheniya matematike [Psychological and pedagogical foundations of teaching mathematics]. M.: OOO «Izdatel'stvo «Verbum-M», OOO «Izdatel'skij centr «Akademiya».
7. Davydov V.V. (2003) Novyj podhod k ponimaniyu struktury i soderzhaniya deyatel'nosti [New approach to understanding the structure and content of activities] // Voprosy psihologii. №2. S.42-49.
8. Dobren'kov V.I., Nechaev V.YA. (2003) Obshchestvo i obrazovanie [Society and Education]. M.: INFRA-M..
9. Kaplunovich I.Ya. (1996) Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkol'nikov v processe obucheniya matematike [The development of spatial thinking of students in the process of learning mathematics]. Novgorod, NRCRO.
10. Kolyagin Yu.M. (1977) Zadachi v obuchenii matematike. CHast' I. Matematicheskie zadachi kak sredstvo obucheniya i razvitiya uchashchihsya [Challenges in learning mathematics. Part I. Mathematical problems as a means of learning and development of students]. M.: Prosveshchenie.
11. Krasnikova L.V. Podaeva N G. (2006) Laboratorno-prakticheskie zanyatiya po resheniyu geometricheskih zadach s primeneniem paketa Mathematica: uchebno-

metodicheskoe posobie [Laboratory and practical classes in solving geometric problems using the Mathematica package: a training manual]. Elets, EGU.

12. Leont'ev A.N. (2004) Deyatel'nost'. Soznanie. Lichnost' [Activity Consciousness. Personality]. M.: Smysl; Akademiya.
13. Leont'ev A.N. (2000) Lekcii po obshchej psihologii [Lectures on general psychology]. M.: Smysl.
14. Lerner I.YA. (1974) Problemnoe obuchenie [Problem learning]. M.: Znanie.
15. Neznamova M.A. (2004) Razvitie matematicheskogo myshleniya studentov universiteta [Development of mathematical thinking of university students]: Dis.... kand. ped. nauk. Orenburg.
16. Podaeva N.G. (2012) Sociokul'turnaya koncepciya matematicheskogo obrazovaniya: monografiya [Socio-cultural concept of mathematics education: monograph]. Elets: EGU.
17. Podaeva N.G., Podaev M.V. (2014) Obnovlenie soderzhaniya shkol'nogo matematicheskogo obrazovaniya: sociokul'turnyj podhod [Updating the content of school mathematics education: a sociocultural approach: a monograph]: monografiya. Sankt-Peterburg: Lan'.
18. Podaeva N.G., Podaev M.V., Masina O.N. Sociokul'turno-orientirovannoe obuchenie matematike v obshcheobrazovatel'noj shkole: strukturno-funkcional'nye komponenty [Socio-cultural-oriented education of mathematics in secondary school: structural and functional components]// Psihologiya obrazovaniya v polikul'turnom prostranstve. 2017. № 37 (1). S. 91-96.
19. Rottenberg V.S. Arshavskij V.V. (1984) Poiskovaya aktivnost' i adaptaciya [Search activity and adaptation]. M.
20. Rubinshtejn S.L. (1999) Osnovy obshchej psihologii [Basics of general psychology]. SPb: ZAO «Izd-vo «Piter».
21. Talyzina N.F. (1984) Upravlenie processom usvoeniya znanij (psihologicheskie osnovy) [Managing the process of learning (psychological foundations)]. M.: Izd-vo Mosk. un-ta.
22. Ustilovskaya A.A. (2008) Psihologicheskie mekhanizmy preodoleniya znakovoj naturalizacii ideal'nogo soderzhaniya geometricheskih ponyatij [Psychological mechanisms for overcoming sign naturalization of the ideal content of geometric concepts]: Dis. ...kand. psih. nauk. M.
23. Holodnaya M.A. (2002) Psihologiya intellekta. Paradoksy issledovaniya [The psychology of intelligence. Research paradoxes]. SPb.: Piter.
24. Shadrikov V.D. (1996) Psihologiya deyatel'nosti i sposobnosti cheloveka: uchebnoe posobie [Psychology of activity and abilities of a person: study guide
25. Selected psychological works]. M.: Izdatel'skaya korporaciya «Logos».
26. Ehl'konin D.B. (1989) Izbrannye psihologicheskie trudy [Selected psychological works]. M.
27. Yakimanskaya I.S. (1980) Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkol'nikov [The development of spatial thinking students]. M.: Pedagogika.

УДК 378.147

# ИНТЕГРАЦИЯ ИННОВАЦИОННЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ВЫЯВЛЕНИИ «ПРОБЛЕМЫХ ЗОН» В СОДЕРЖАНИИ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

**Дворяткина Светлана Николаевна**
д.п.н., доцент
sobdvor@yelets.lipetsk.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

**Сафронова Татьяна Михайловна**
к.п.н.,доцент
stm657@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

**Аннотация.** В статье актуализируется проблема повышения качества математического образования, включая педагогическую оценку освоенности предметных знаний и процедур обучающимися. Решение проблемы основано на актуализации классических педагогических и внедрении новых инновационных технологий. Цель статьи состоит в выявлении «проблемных зон» в содержании выпускных экзаменов по математике посредством практической реализации инновационных методов обучения — интерактивной дидактической игры «Своя игра» в рамках работы зимней университетской школы «ОНИКС». В основной части работы раскрыто содерание понятия «проблемная зона» в содержании выпускных экзаменов по математике, предложены критерии выявления «проблемных зон» в обучении математике, основанные на решении сложных задач (вариативного целеполагания, отсутствие инварианта структуры эффективной деятельности, практической инновации, вероятностного прогнозирования), а также представлен сценарий интерактивной дидактической игры для школьников. Сценарий содержит все необходимые структурные элементы: цель, задачи игры; оборудование и программное обеспечение; время проведения игры; участники; детальное описание игры. В заключение исследования были выявлены «проблемные зоны» в содержании предстоящих выпускных экзаменов по математике — это текстовые задачи на движение, проценты и части, смеси и сплавы, определены и обоснованы методические, психологические и организационные условия формирования «проблемных зон» в содержании выпускных экзаменов по математике. Полученные результаты исследования обладают новизной и практически значимы, так как они открывают хорошие перспективы для дальнейшего теоретического изучения и более детального эмпирического исследования «проблемных зон» в содержании выпускных экзаменов по математике.

**Ключевые слова:** обучение математике, интеграция классических и инновационных технологий, синергия игровой и математической деятельности, сложное знание.

**Введение.** Решение проблемы повышения качества математического образования, включая педагогическую оценку освоенности предметных знаний и процедур обучающимися, может быть основано на актуализации классических педагогических и внедрении новых инновационных технологий. Подобный симбиоз будет эффективен к процессам освоения сложного математического знания и математических методов в контексте реализации личностных предпочтений в познавательной деятельности и творческой самостоятельности. Содержание математического образования в школе изобилует сложными, многоступенчатыми абстракциями базовых учебных элементов и процедур, что создает в большинстве случаев основу для формального их освоения без должной организации и методического обеспечения эффективности когнитивных процессов. В связи с этим необходим, с одной стороны, поиск доступных для школьников инновационных форм и методов в освоении сложного знания, с другой стороны, воссоздание классических процедур и средств.

В условиях нарастающей сложности заданий ЕГЭ в последнее десятилетие резко снизилось качество выполнения итоговых заданий, только за 2018 год 1,65% респондентов имеют высокий уровень математической подготовки и 28% повышенный уровень, а большинство школьников испытывают затруднения в воспроизведении математических знаний и умений уровня средней школы по большинству тем, в частности: «Уравнения», «Неравенства», «Текстовые задачи», «Планиметрия», «Стереометрия» и др. [1; 7].С позиций международных стандартов, принятых в исследовании TIMSS-Advante, в подготовке российских выпускников средней школы, изучавших углубленный курс математики, не наблюдается никакой динамики с 1995 года [4].

Возможность решения сложных математических задач возникает при выявлении «проблемных зон» математического образования, а также при исследовании сложных математических конструктов, связанных с «проблемной зоной», посредством синергии классических и инновационных технологий, а также разных форм деятельности, в частности, игровой и математической. Наиболее «выпукло» данную проблему можно высветить при актуализации «проблемных зон» в содержании выпускных экзаменов по математике, так как технология проведения ЕГЭ и особенности контрольных измерительных материалов обеспечивают широкую дифференциацию учащихся по уровню их подготовки и объективности оценки образовательных достижений учащихся. Предварительное выявление «проблемных зон» на основе интеграции игровой и математической деятельности в системе дополнительного образования даст возможность устранить негативные последствия при решении экзаменационных заданий повышенной сложности, а также обеспечит устойчивую мотивацию к изучению математики, эффективное развитие интеллектуальных операций мышления, творческую самостоятельность и самоактуализацию школьников, а также разумный баланс между формально-логическими и формально-коммуникативными умениями.

Цель статьи состоит в выявлении «проблемных зон» в содержании выпускных экзаменов по математике посредством практической реализации инновационных методов обучения ‒ интерактивной дидактической игры «Своя игра» в рамках работы зимней университетской школы «ОНИКС».

**Методология и технология исследования**

Технология выявления и исследования «проблемных зон» в процессе освоения сложного математического знания была разработана исследователем Е.И. Смирновым на основе адаптации современных достижений в науке к обучению математике [5; 6] и реализации диалога культур в школе и вузе [2]. Сама технология основана на поэтапном раскрытии сложной сущности сложного учебного элемента «проблемной зоны» посредством интеграции классических и инновационных методов и средств. Под «проблемной зоной математического образования» автор понимает «комплекс содержательных, процессуальных и личностно-адаптационных компонентов обучения математике, основанных на обнаружении противоречий и проблем когнитивной деятельности в конкретно определенной области и ориентированных на поиск и исследование сущностей ее сложных учебных элементов» [5]. Были предложены критерии выявления «проблемных зон» в обучении математике, основанные на решении сложных задач [3; 5]:

- *вариативного целеполагания*: процесс выявления «проблемных зон» в обучении математике основан на множественности целеполагания при решении сложных задач (постановка разнообразных, разнотипных и разноуровневых целей);

- *отсутствие инварианта структуры эффективной деятельности:* отсутствие возможности моделирования поиска решения задач, неизменной общей схемы или алгоритма, применимого к любым ситуациям и позволяющего либо безошибочно решать сложную задачу, либо доказывать ее неразрешимость;

- *практическойинновации:* необходимость поиска исследовательских стратегий с применением инновационных технологий (экспериментальные срезы, варьирование условий и параметров функционирования «проблемной зоны», сравнительный анализ и т.д.);

- *вероятностного прогнозирования:* невозможность полного предсказания результатов исследования «проблемной зоны», наблюдение как прогнозируемых результатов, так и непредсказуемых (побочных) продуктов.

В настоящей статье предлагаем сценарий интерактивной дидактической игры, разработанный и реализованный на практике в рамках работы зимней университетской школы «ОНИКС»по образцу телевизионного шоу «Своя игра» для предварительного выявления «проблемных зон» в содержании ЕГЭ по математике. Техническое сопровождение обеспечивает дидактической игре насыщенную интерактивность и динамичный контроль освоения учебного материала по всем разделам школьной математики, выносимых на экзамен, посредством следующих преимуществ: быстродействие, способность хранить любой объем информации, индивидуализация, точность, наглядность получаемой информации, возможность проведения игры в режиме диалога "человек – ПК", возможность имитации внешних изменений и др.

**Цель и задачи игры:** выявить «проблемные зоны» в содержании выпускного экзамена по математике; развивать умения применять полученные знания при решении междисциплинарных проблем и в различных нестандартных ситуациях; формировать интерес к математике; способствовать всестороннему развитию личности обучаемых; содействовать воспитанию коллективизма, культуры общения.

**Оборудование и ТСО:** компьютер, экран, проектор, программное приложение.

**Время проведения:** 2 академических часа.

**Участники игры:** обучающиеся 10-11 классов, среди которых: игроки-участники, наблюдатели, один ведущий (преподаватель), один технический сопровождающий (студент бакалавриата).

**Место проведения игры:** учебная аудитория.

**Описание игры.**Игра-викторина проводилась по принципу известной интеллектуальной телевизионной игры «Своя игра». Команды поочерёдно выбирают на табло рубрику, а затем вопрос, на который отвечают после 2-х или 3-х минутного обсуждения (в зависимости от раунда). Выигрывает та команда, которая даст за игру больше правильных ответов. Вопросы по различным темам школьного курса математики, но обязательно в новогодней фабуле. Игра проходила в 3 раунда — два основных и один финальный. Каждый из основных раундов содержал 3 рубрики по 4 задачи в каждой. Каждый вопрос темы имеет свою стоимость – в первом раунде она варьируется от 100 до 400 очков, во втором – от 200 до 800. Чем выше цена вопроса, тем он сложнее. Темы для первого раунда: «Этот удивительный вероятностный мир», «Новогодний хоровод», «В мире частей и процентов». На решение задач данного этапа игры отводилось 2 минуты. Для второго раунда были предложены более сложные темы, время решение задач фиксируем до 3 минут. Школьникам были предложены следующие темы: «**Математика случайного в помощь выпускникам**», «**Снегометрия**», «**Волшебные сплавы и смеси**». Примеры задач второго раунда, которые вызвали наибольшее затруднение у школьников, представлены на рисунке 1.

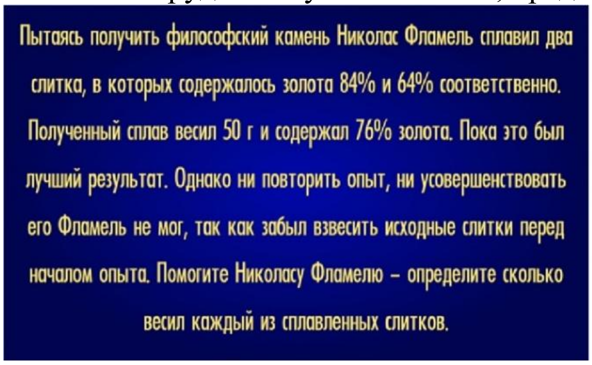




***Рис. 1. Пример задачи стоимостью 800 очков из темы «Волшебные сплавы и смеси»***

В настоящей игре принимало участие три команды, основной целью которых было поочередно отвечать на вопросы различной стоимости и зарабатывать как можно большее число очков. В начале игры у каждой команды на счету было 0 очков. Звучит выбранная задача, и, после этого, игрокам отпускается 2 минуты на ее решение. Тот капитан команды, кто поднял руку первым, имеет право на ответ. За правильное решение команда получает столько очков, сколько стоила эта задача, а также право на выбор следующей задачи. В случае неправильного решения эту сумму снимают со счёта команды, а другие капитаны снова получают право на ответ. Ошибившийся капитан уже не имеет права ответить вторично. Каждый раунд продолжался до тех пор, пока не будут разыграны все вопросы. В игре также существуют специальные вопросы – «Кот в мешке»: если игроку достался вопрос «Кот в мешке», он обязан передать его кому-то из соперников.

Перед финальным раундом командам оглашается их сумма на счете. В финале играют только капитаны. Игрокам предлагаются 7 возможных тем (рис. 2). Они по очереди (в порядке возрастания сумм) убирают 1 тему до тех пор, пока не останется последняя тема. Затем игроки делают ставки. Поставить каждый может от 1 очка до всей своей суммы. Они не знают ставок своих соперников. После этого на экране появляется текст задачи, на решение которой отводится 5 минут. По истечении этого времени ведущий зачитывает ответы игроков и их ставки. Если ответ игрока верен, то сумма ставки прибавляется к счёту команды. В противном случае команда теряет сумму в размере собственной ставки. Победителем объявляется команда, набравшая по итогам финала наибольший результат.

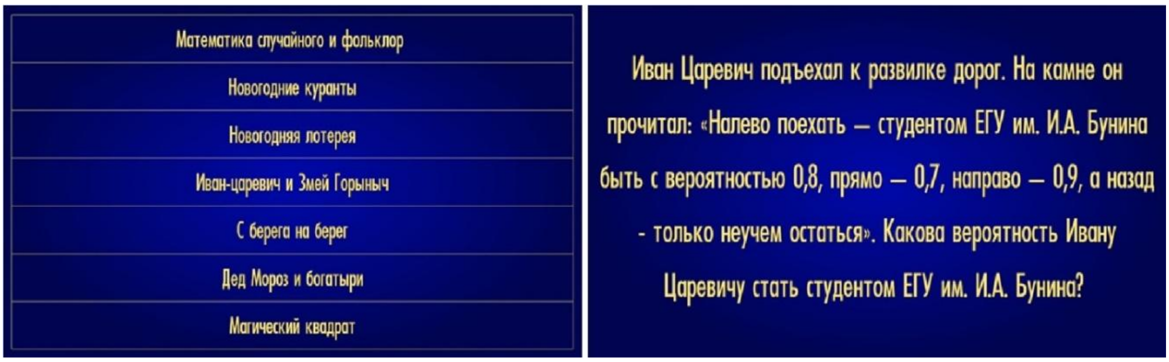



***Рис. 2. Примеры тем финального раунда и задачи последнего раунда***

**Результаты исследования.**

**1.** В ходе проведения интерактивной дидактической игры были выявлены «проблемные зоны» в содержании предстоящих выпускных экзаменов по математике. Таковыми для обучающихся 10-11 оказались текстовые задачи на движение, проценты и части, смеси и сплавы: школьники чаще всего решали эти задачи неверно, либо вовсе отказывались их решать. При этом важно отметить, что текстовые задачи включены в структуру экзаменационной работы ЕГЭ по математике и относятся к заданиям повышенного уровня сложности. Решение текстовых (сюжетных) задач – раздел школьного курса математики, достаточно сложный для восприятия и усвоения учащимися в силу:

– неразработанности его аналитического аппарата, который независимо от вида задачи позволял бы рассматривать всякую задачу как систему условий и требований;

– неумения при решении текстовых задач составлять математические модели рассматриваемых конкретных ситуаций;

– недостаточно развитого у обучающихся алгоритмического мышления.

**2.** Были выявлены и обоснованы методические, психологические и организационные условия формирования «проблемных зон» в содержании выпускных экзаменов по математике, состоящие в следующем:

1) традиционно в школьном курсе математики тема «Проценты» изучается непродолжительно на начальном этапе основной школы – в 5-6 классах. В это время школьники уже знают и умеют применять правила нахождения дроби от числа, числа по его дроби. Однако обучение решению задач на проценты идет без связи с задачами на дроби, и учащимся довольно сложно воспользоваться освоенными умениями в теме, где рассматриваются не просто числитель и знаменатель, а количество процентов, содержащееся в целом и его части. Вскоре после этого школьников учат решать задачи на проценты с применением пропорций, в результате чего учащиеся начинают уделять большее внимание определению характера пропорциональности величин, нежели пониманию смысла выполняемых действий, что делает процесс решения задачи скорее механическим, чем осознанным;

2) анализ и учет возрастных особенностей учащихся 5-6 классов позволяет утверждать, что в данном возрасте еще невысока математическая грамотность школьников, ввиду чего они не могут рассмотреть все виды задач на проценты; обучающиеся не имеют практического опыта применения процентов, следовательно, содержание темы осознанно не усваивается и, как следствие, не формируется умение переносить знания о процентах в новые ситуации на протяжении дальнейшего изучения курса математики;

3) анализ задачного материала по теме «Проценты» в школьных учебниках по математике в 5-6 классах позволяет сделать вывод об однообразности задач и недос-

таточном их количестве (в разных учебниках их число варьируется от 10 до 18), что также не способствует формированию умения решать соответствующие задачи;

4) незначительное внимание решению задач на проценты, концентрацию, смеси и сплавы уделяется и в курсе алгебры 7-9 классов. В учебниках отсутствует компактное и четкое изложение соответствующей теории, материал разбросан по курсу и носит эпизодический и бессистемный характер. В основном задачи на проценты, концентрацию, смеси и сплавы находятся в учебниках алгебры в разделах «Задачи на повторение» или «Задачи повышенной трудности», а их количество в школьных учебниках составляет в среднем от 1 до 5. Таким образом, навыки решения задач на проценты и концентрацию утрачиваются;

5) отсутствует циклический возврат в 10-11 классах к решению задач на проценты и части, концентрацию, смеси и сплавы: современные учебники по математике для старшей школы подобных заданий не содержат;

6) решение любых текстовых задач основывается на построении различных математических моделей (уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств). Потеря навыков решения задач на проценты и концентрацию, непонимание смысла выполняемых действий приводят к составлению неверных математических моделей и, как результат, к неверному решению задач. Кроме того, из-за нетрадиционной формулировки условия задачи школьники не могут увидеть знакомый тип задачи и найти верное решение.

**3**. Вопросам коррекции и исследованию «проблемных зон» в содержании выпускных экзаменов по математике, выявленных в ходе первого этапа, был посвящен следующий этап —второй день работы зимней университетской школы «ОНИКС». Основным инструментом исследования «проблемных зон» стали популярные лекции (классические формы) по сложным разделам математики.

**Список литературы:**


1. Болотов В.А., Седова Е.А., Ковалева Е.С. Состояние математического образования в РФ: общее среднее образование (аналитический обзор) // Проблемы математического образования. 2012. №6. С. 32-47.
2. Дворяткина С.Н., Евтеев В.С. Особенности технологии обучения математике на основе диалога культур в системе профильного гуманитарного образования // Ярославский педагогический вестник. Серия «Психолого-педагогические науки». 2017. №5. С.123-129.
3. Дворяткина С.Н., Симоновская Г.А. Актуализация синергетических эффектов в «проблемных зонах» школьного математического образования на основе шахматной игры (на примере изучения комбинаторики)// Ярославский педагогический вестник. Серия «Психолого-педагогические науки». 2018. №6. С.89-97.
4. Пентин А.Ю., Ковалева Г.С., Давыдова Е.И., Смирнова Е.С. Состояние естественнонаучного образования в российской школе по результатам международных исследований TIMSS и PISA // Вопрос образования. 2018. №1. С. 79-107.
5. Смирнов Е.И. Синергия исследования «проблемной зоны» базового учебного элемента содержания математического образования // Ярославский педагогический вестник. 2017. №5. С. 82–90.
6. Смирнов, Е.И., Смирнов Н.Е., А.Д. Уваров А.Д. Этапы технологического сопровождения процесса самоорганизации в математическом образовании будущего педагога // Ярославский педагогический вестник. 2017. №3. С. 102–111.
7. Щербатых С.В. Методический анализ результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень) // Центр мониторинга и оценки качества образования Липецкой области. Электронный ресурс: http://cmoko48.lipetsk.ru/gia/data

# ACTIVE METHODS OF TRAINING IN MATHEMATICS: POSITIVE AND NEGATIVE SYNERGETIC EFFECTS

**S.N. Dvoryatkina**
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
sobdvor@yelets.lipetsk.ru
Moscow
Bunin Yelets State University

**T.M. Safronova**
Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor
stm657@mail.ru
Yelets
Bunin Yelets State University

**Abstract.** The article actualizes the problem of improving the quality of mathematics education, including the pedagogical assessment of the development of subject knowledge and procedures by students. The solution of the problem is based on the actualization of classical pedagogical and the introduction of new innovative technologies. The goal of the article is to identify "problem areas" in the content of final exams in mathematics through the practical implementation of innovative teaching methods - the interactive didactic game "Own Game" as part of the ONIKS winter university school. In the main part of the work, the content of the notion "problem zone" in the content of final exams in mathematics is disclosed; criteria for identifying "problem zones" in teaching mathematics are proposed, based on solving complex problems (variable goal setting, lack of invariant structure of effective activity practical innovation, probabilistic forecasting), and also presents a scenario of an interactive didactic game for schoolchildren. The scenario contains all the necessary structural elements: the goal, the tasks of the game; equipment and software; the time of the game; participants; detailed description of the game. In conclusion, the study identified "problem areas" in the content of the upcoming final exams in mathematics - these are textual tasks for movement, percentages and parts, mixtures and alloys, and methodological, psychological and organizational conditions for the formation of "problem areas" are defined and substantiated »In the content of the final examinations on mamatics. The results of the research are new and practically significant, as they open up good prospects for further theoretical study and more detailed empirical research on "problem areas" in the content of final exams in mathematics.

**Keywords:**teaching mathematics, integration of classical and innovative technologies, synergy of gaming and mathematical activity, complex knowledge.

## References

1. Bolotov V.A., Sedova E.A., Kovaleva E.S. Sostoianie matematicheskogo obrazovaniia v RF: obshchee srednee obrazovanie (analiticheskii` obzor) [The state of mathematics education in the Russian Federation: general secondary education (analytical review)] // Mathematics education problems. 2012. №6. pp. 32-47.
2. Dvoriatkina S.N., Evteev V.S. Osobennosti tekhnologii obucheniia matemati-ke na osnove dialoga kul`tur v sisteme profil`nogo gumanitarnogo obrazo-vaniia [Features of the technology of teaching mathematics based on the dialogue of cultures in the system of specialized humanitarian education] //Yaroslavl Pedagogical Gazette. Series "Psychological and Pedagogical Sciences". 2017. №5. pp.123-129.

3. Dvoriatkina S.N., Simonovskaia G.A. Aktualizatciia sinergeticheskikh e`ffek-tov v «problemny`kh zonakh» shkol`nogo matematicheskogo obrazovaniia na os-nove shakhmatnoi` igry` (na primere izucheniia kombinatoriki) [Actualization of synergistic effects in “problem areas” of school mathematics education based on a chess game (using the example of combinatorics)]// Yaroslavl Pedagogical Gazette. Series "Psychological and Pedagogical Sciences". 2018. №6. pp.89-97.
4. Pentin A.Iu., Kovaleva G.S., Davy`dova E.I., Smirnova E.S. Sostoianie estestvennonauchnogo obrazovaniia v rossii`skoi` shkole po rezul`tatam mezhdunarodny`kh issledovanii` TIMSS i PISA [The state of science education in the Russian school according to the results of international studies TIMSS and PISA] // Education issue. 2018. №1. pp. 79-107.
5. Smirnov E.I. Sinergiia issledovaniia «problemnoi` zony`» bazovogo uchebno-go e`lementa soderzhaniia matematicheskogo obrazovaniia [Synergy of research "problem zone" of the basic educational element of the content of mathematical education] // aroslavl Pedagogical Gazette. 2017. №5. pp. 82–90.
6. Smirnov, E.I., Smirnov N.E., A.D. Uvarov A.D. E`tapy` tekhnologicheskogo soprovozhdeniia protcessa samoorganizatcii v matematicheskom obrazovanii budushchego pedagoga [Stages of technological support of the process of self-organization in the mathematical education of the future teacher] // aroslavl Pedagogical Gazette. 2017. №3. pp. 102–111.
7. Shcherbaty`kh S.V. Metodicheskii` analiz rezul`tatov EGE` po matematike (profil`ny`i` uroven`) [Methodical analysis of the exam results in mathematics (profile level)] // Center for monitoring and assessing the quality of education in the Lipetsk region. Electronic resource:http://cmoko48.lipetsk.ru/gia/data/2018/%D0%95%D0%93%D0%AD/02%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.pdf

УДК 372.8: 514.7

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСТОРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Игнатушина Инесса Васильевна**
д.п.н., к. ф.-м.н., доцент
e-mail: streleec@yandex.ru
г. Оренбург

ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет»

**Аннотация.** В статье представлена классификация задач по дифференциальной геометрии, в основе которой лежит характер связей между элементами задачи и соотношение между воспроизводящей и творческой деятельностью студентов при их решении. Показано, что важным источником для выбора текстов задач и методов их решения являются работы ученых - создателей классической дифференциальной геометрии. Работа с соответствующим научным текстом позволяет обучающемуся освоить такую образовательную стратегию, как методологическая редукция.

**Ключевые слова:** дифференциальная геометрия, решение задач, исторический материал

Умение решать математические задачи является одним из главных показателей освоения соответствующего учебного материала. Поэтому метод работы со специальной системой задач занимает ведущее место в обучении математике. Если понятие математической задачи трактовать достаточно широко, в частности, считать всякую теорему задачей, то математическая деятельность обучающихся сводится к решению задач. Решение каждой математической задачи осуществляется по следующим основным этапам:

- понимание условия и требования задачи, ясное усвоение и осмысление отдельных элементов условия;
- составление плана решения;
- практическая реализация плана во всех его деталях;
- проверка правильности полученного результата и корректировка решения в случае допущения ошибок;
- окончательное рассмотрение задачи и её решения с целью выявления тех моментов, которые могут стать полезными в дальнейшем.

Отталкиваясь от характера связей между элементами задачи и соотношения между воспроизводящей и творческой деятельностью студентов при ее решении, можно предложить следующую классификацию задач по дифференциальной геометрии: алгоритмические задачи, полуалгоритмические задачи, эвристические задачи.

К алгоритмическим относятся задачи, которые решаются с помощью непосредственного применения определения, теоремы, т.е. для решения которых имеется алгоритм.

Например, найти уравнение касательной к винтовой линии.

Решение. Уравнение касательной в координатной форме имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{x'}=\frac{y-y_0}{y'}=\frac{z-z_0}{z'}.$$

Винтовая линия задается системой уравнений: $x=a\cos u$, $y=a\sin u$, $z=bu$.

Следовательно, уравнение искомой касательной будет иметь вид:

$$\frac{x-a\cos u}{-a\sin u}=\frac{y-a\sin u}{a\cos u}=\frac{z-bu}{b}.$$

Любая из полуалгоритмических задач в качестве подзадач содержит алгоритмические задачи, а правила ее решения носят обобщенный характер. Решая полуалгоритмические задачи, студент учится «сворачивать» знания, фиксируя их в своем сознании крупными блоками. При этом усвоенные алгоритмы он начинает применять в разных ситуациях.

Пример полуалгоритмической задачи: углом пересечения двух линий называют угол, составленный касательными к этим линиям в их общей точке. Определить угол пересечения двух парабол с общей осью, если фокус каждой из них находится в вершине другой.

Решение. Согласно условию задачи, параболы имеют оси, расположенные на одной прямой, но противоположно направленные (в противном случае, рассматриваемые параболы не пересекались бы). Если уравнение одной из них имеет вид: $y^2=2px$, то другой параболе будет соответствовать уравнение: $y^2=-2p\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

В точке $\left(\frac{p}{4};\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ пересечения этих парабол угловые коэффициенты их касательных будут: для первой параболы $\sqrt{2}$, для второй $-\sqrt{2}$. Тогда параболы пересекаются под углом, тангенс которого имеет значение:

$$tg\varphi=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1-2}=2\sqrt{2}.$$

Отсюда угол пересечения парабол будет $\varphi=arctg2\sqrt{2}$.

В силу симметрии этих парабол относительно оси абсцисс во второй точке пересечения $\left(\frac{p}{4};-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ угол между параболами будет таким же.

Для решения эвристической задачи студенту необходимо выявить некоторые скрытые связи между элементами условия и требования или найти способ решения, который не является очевидной конкретизацией некоторого обобщенного правила, известного обучаемому, или сделать и то и другое.

За свою историю дифференциальная геометрия накопила огромное количество таких задач. Поэтому научные работы создателей этого раздела математики могут стать прекрасным источником для поиска не только соответствующих текстов задач, но и идей для их решения.

Приведем пример эвристической задачи, взятой из работы Л.Эйлера «Об изображении поверхности шара на плоскости» (1777г.) [1]: доказать, что любой кусок сферы невозможно конгруентно отобразить на плоскость.

Решение. Пусть abc – часть сферы единичного радиуса [рис. 1] , b – полюс, ac – часть экватора, ab – нулевой меридиан, p – некоторая точка на сфере (ее положение задается долготой $al = t$ и широтой $lp = u$). Если зададим приращение долготы $dt = ll'$ и широты $du = pq$, то получим на сфере точку $s$ с координатами $(t + dt; u + du)$. Отрезок $ps$ есть линейный элемент сферы. Точка $r$ имеет долготу $t + dt$ и широту $l'r = u$, тогда $pr = \cos u dt$. В силу малости $dt$ и $du$ можно считать $pqrs$ прямоугольником, диагональ которого $ps = \sqrt{du^2 + \cos^2 u dt^2}$ .

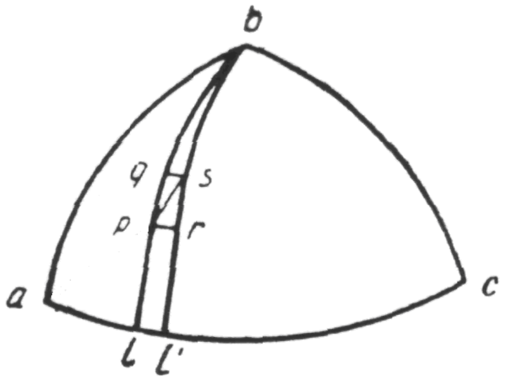



Рис. 1

Точки $P$, $Q$, $R$, $S$ плоскости [рис. 2] соответственно являются образами точек $p$, $q$, $r$, $s$ сферы.

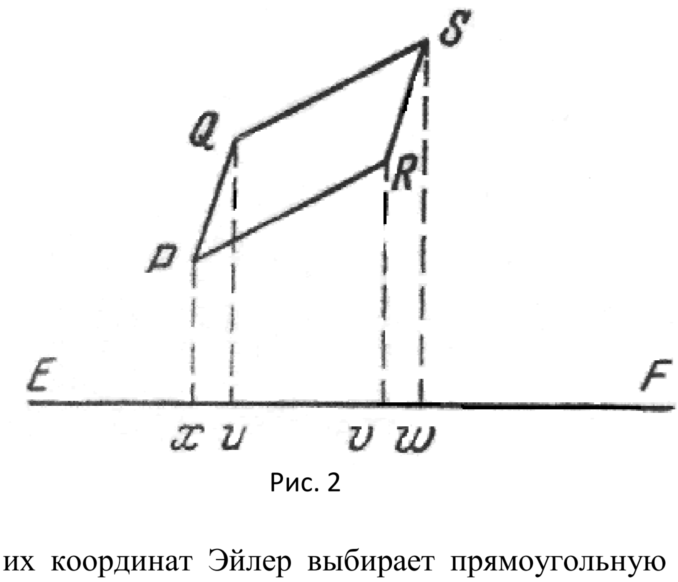



Рис. 2

Для определения их координат Эйлер выбирает прямоугольную декартовую систему координат с началом в точке $E$ и осью абсцисс $EF$. Координатами точки $P$ будут $EX = x$ и $PX = y$.

Далее отмечается, что, так как точка $P$ получается при отображении точки $p(t;u)$ сферы на основании некоторого закона, то ее координаты $x$ и $y$ задаются как функции от двух переменных $t$ и $u$.

Точка $q$ получается из точки p только изменением широты $u$, поэтому координаты точки $Q$ будут иметь следующие значения: $EU = x + \frac{\partial x}{\partial u}du$, $QU = y + \frac{\partial y}{\partial u}du$.

Аналогично, так как точка $r$ получается из точки p при изменении только долготы $t$, то координаты точки $R$ следующие: $EV = x + \frac{\partial x}{\partial t}dt$, $RV = y + \frac{\partial y}{\partial t}dt$.

Наконец, точка $s$ получается из точки p путем одновременного изменения $t$ и $u$, поэтому координаты точки $S$ имеют вид: $EW = x + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial t}dt$, $SW = y + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial t}dt$.

Далее находятся величины: $XU = EU - EX = \frac{\partial x}{\partial u}du$; $VW = EW - EV = \frac{\partial x}{\partial u}du$; $QU - PX = \frac{\partial y}{\partial u}du$; $SW - RV = \frac{\partial y}{\partial u}du$, которые попарно равны. Откуда следует, что $RS = PQ$ и $QS = PR$. Таким образом, четырехугольник $PQSR$ является параллелограммом со сторонами: $PQ = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}du$, $PR = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}dt$.

Обозначив через $\varphi$ угол наклона $PQ$ к оси $EF$, через $\beta$ – угол наклона $PR$ к $EF$ и положив: $\frac{\partial x}{\partial u} = p$, $\frac{\partial x}{\partial t} = q$, $\frac{\partial y}{\partial u} = r$, $\frac{\partial y}{\partial t} = s$ (не путать с обозначениями точек на сфере), получим: $tg\varphi = (QU - PX) : XU = \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial x}{\partial u}$, $tg\beta = (RV - PX) : XV = \frac{\partial y}{\partial t} : \frac{\partial x}{dt}$,

$$XW = dx = pdu + qdt, \quad SW - PX = dy = rdu + sdt. \tag{1}$$

Для того, чтобы два последних выражения были полными дифференциалами, на функции p, $q$, $r$, $s$ Эйлер накладывает следующие условия:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial u}. \tag{2}$$

Предположим, что прямоугольник $pqsr$ сферы отобразился в конгруентный ему четырехугольник $PQSR$ плоскости. Тогда $PQ = pq$, $PR = pr$, $\angle QPR = 90^\circ$ и, следовательно:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} = 1 \quad \text{или} \quad p^2 + r^2 = 1, \tag{3}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \cos u \quad \text{или} \quad q^2 + s^2 = \cos^2 u,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial t} : \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$$

Из этих равенств Эйлер заключает, что $p=\cos\varphi$, $r=\sin\varphi$, $q=-\sin\varphi\cos u$, $s=\cos\varphi\cos u$. Тогда равенства (1) примут вид: $dx=\cos\varphi du-\sin\varphi\cos u dt$, $dy=\sin\varphi du+\cos\varphi\cos u dt$,

а условия (2) можно записать так:

$$-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\sin u\sin\varphi-\cos u\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad (4)$$

$$\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\sin u\cos\varphi-\cos u\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}. \qquad (5)$$

Умножив равенство (4) на $\cos\varphi$, а равенство (5) на $\sin\varphi$ и сложив результаты, получим $0=\cos u\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, т.е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0. \qquad (6)$$

Умножив (4) на $-\sin\varphi$, а (5) на $\cos\varphi$ и сложив результаты, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\sin u. \qquad (7)$$

Равенство (6) показывает, что $\varphi$ должно зависеть только от переменной $t$, что противоречит (7), из которого выходит, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ изменяется с изменением $u$.

Таким образом, Эйлер заключает: «Вполне точное [т. е. конгруентное] изображение [хотя бы куска сферы на плоскость] полностью исключается и мы вынуждены волей-неволей обратиться к изображениям, которые не будут подобными и у которых фигура на плоскости чем-нибудь отличается от изображаемой ею фигуры на сфере» [2, с.75].

Работа с научным текстом позволяет обучающемуся освоить такую образовательную стратегию, как методологическая редукция, или реконструкция идей, посредством которых он, изучая ход мыслей создателей классической дифференциальной геометрии, воспроизводит математическую логику мышления, осуществляя тем самым трансфер проблемно-поискового способа научного исследования [3]. Это способствует не только лучшему пониманию студентами изучаемого материала, но и служит подготовительным этапом к их будущей научно-исследовательской работе. Поэтому включение в содержание учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия» научно-исторического контекста, в частности через использование в обучении аутентичных текстов создателей дифференциальной геометрии является значимым.

**Список литературы**


1. Эйлер, Л. О географической проекции поверхности шара // Л. Эйлер. Избранные картографические статьи. М., 1959. С. 51– 64.
2. Игнатушина И.В. Материалы для спецкурса «Из истории формирования классической дифференциальной геометрии: применение математического анализа к геометрии в работах Леонарда Эйлера». Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2010. 132 с.

3. Игнатушина И.В. Принцип центризма научного текста и его реализация в обучении дифференциальной геометрии // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2016. №1. С. 236–243.

## THE USE OF HISTORICAL MATERIAL IN TEACHING STUDENTS TO SOLVE PROBLEMS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY

**I.V. Ignatushina**
Dr. Sci. (Pedagogy),associate professor
streleec@yandex.ru
Orenburg
Orenburg state pedagogical University

**Abstract**. The article presents the classification of problems by differential geometry, which is based on the nature of the relationship between the elements of the problem and the relationship between the reproducing and creative activity of students in their decision. It is shown that an important source for the choice of texts of problems and methods of their solution are the works of scientists - creators of classical differential geometry. Work with the corresponding scientific text allows the student to master such an educational strategy as methodological reduction.

**Keywords**: differential geometry, problem solving, historical material.

**References**

1. Euler, L. (1959) O geograficheskoj proekcii poverhnosti shara [On the geographical projection of the surface of the ball] // L. Euler. Izbrannye kartograficheskie stat'i [Selected cartographic articles]. M. Pp. 51–64.
2. Ignatushina I.V. (2010) Materialy dlya speckursa «Iz istorii formirovaniya klassicheskoj differencial'noj geometrii: primenenie matematicheskogo analiza k geometrii v rabotah Leonarda Eulera» [Materials for the special course "From the history of the formation of classical differential geometry: the application of mathematical analysis to geometry in the works of Leonard Euler"]. Orenburg: Publishing house OGPU. 132 p.
3. Ignatushina I.V. (2016) Princip centrizma nauchnogo teksta i ego realizaciya v obuchenii differencial'noj geometrii [The principle of centrism of the scientific text and its implementation in teaching differential geometry] // Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. [Bulletin of the Orenburg State Pedagogical University]. Orenburg: Publishing house of the OGPU. №1. Pp. 236–243.

УДК 372

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО СИМУЛЯТОРА НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ, ФИЗИКИ, АСТРОНОМИИ

**Клыков Дмитрий Юрьевич**
учитель информатики и астрономии
dyuk108@gmail.com
Москва
ГБОУ Школа № 1566 г. Москвы

**Кондакова Елена Владимировна**
к.п.н., доцент
evkondakova@gmail.com
Елец
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

**Аннотация.** В статье рассматриваются возможности применения компьютерного моделирования для демонстрации гравитационных взаимодействий. Приведён пример использования симулятора OrbitXplorer при выполнении лабораторной работы курса астрономии. Выполнение специально подобранных заданий лабораторного практикума в процессе изучения астрономии, физики, информатики в школе вовлекает учащихся в творческую деятельность, в процессе которой возникают новые для субъекта результаты: знания, решения, интеллектуальные и материальные продукты.

**Ключевые слова:** гравитация, гравитационный симулятор, задача N тел, моделирование.

Объяснение гравитационных взаимодействий на уроках физики, астрономии полезно сопровождать иллюстрацией. Гравитацию Земли показать просто – достаточно бросить грузик, который упадёт на Землю под воздействием её силы притяжения. Но как показать гравитационное взаимодействие нескольких тел, двигающихся со скоростями несколько километров в секунду? Приходится прибегать к помощи моделирования.

Один способ моделирования крайне прост – на большой обруч натягивается эластичная ткань, на которую кладутся металлические шарики различного веса, продавливающие ткань [1]. Взаимодействие шаров напоминает действие сил гравитации на космические тела. Данный способ крайне прост в изготовлении, позволяет коллективно, всем классом, участвовать в эксперименте (рис. 1). Однако использование модели требует сноровки, применение очень эластичной ткани (лайкры), да и точность крайне низкая. При прокатывании шарика по ткани ощутимо теряется его кинетическая энергия, что не позволяет получить сколько-нибудь продолжительного эффекта.

Рис. 1. Проектная работа учащегося 10 класса с материальной моделью пространства-времени.

Второй способ – компьютерная симуляция, которая также позволяет иллюстрировать решение задачи N тел путём последовательного применения закона всемирного тяготения к различным парам тел (как известно, задача гравитационного взаимодействия N тел аналитически не решена). Перемещение тел в модели производится небольшими шагами, при этом пользователь видит на экране плавное движение космических тел. Учитель может производить подобные демонстрации на экране – это может быть использовано как пример компьютерного моделирования в процессе объяснения темы "Моделирование и формализация" учебного предмета "Информатика и ИКТ". Подобная демонстрация может быть использована и в курсе физики 9 класса.

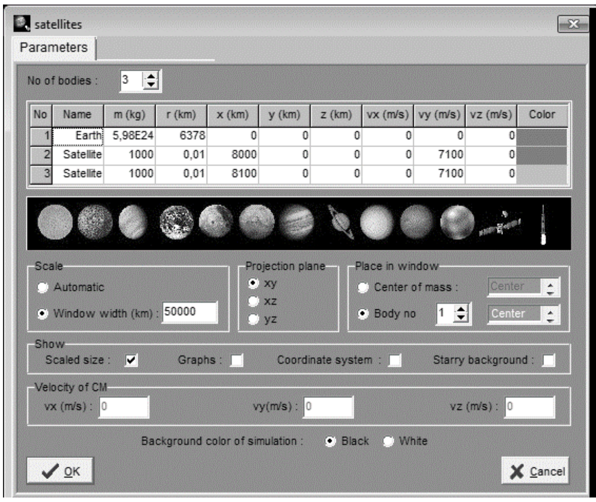
Однако, как показал опыт, намного продуктивнее провести лабораторную работу в компьютерном классе, когда учащиеся могут самостоятельно задавать параметры модели и отрабатывать «запуск» спутников, движение астероидов, планет, звёзд.

Авторами выбран симулятор OrbitXplorer [2] как наиболее удобный для применения в школе. Программа условно платная. В незарегистрированном варианте позволяет провести моделирование только в течение 20 секунд. Однако учитель может таким образом сформулировать задание, что этого окажется достаточно для решения учебной задачи. Из бесплатных программ хорошо себя зарекомендовала Gravitas [3]. Однако для описания модели здесь требуется знание скриптового языка Lua, что затрудняет использование данной программы в школе.

Приведем пример использования симулятора OrbitXplorer при выполнении лабораторной работы курса астрономии (11 класс), в основу которой положена задача «Хочешь быстрее – тормози» из книги [4]. Впрочем, последнюю часть названия задачи учитель может не озвучивать в начале урока, потому что решение учащиеся должны найти сами. Задача была переформулирована следующим образом. Мы – космонавты орбитальной станции, двигающейся вокруг Земли по орбите, близкой к круговой. Вдруг нас обгоняет спутник-конкурент, который движется по похожей орбите в той же плоскости, но с чуть меньшей полуосью. Мы хотим его обогнать! Но как? Куда нужно направить сопло ракетного двигателя? Назад, чтобы ускориться, вперёд, чтобы затормозить, к Земле или от Земли?

Перед началом работы повторяем законы Кеплера. Данная тема обычно считается крайне скучной, потому что приходится решать задачи, используя довольно сложные формулы. Чаще всего учащимся не ясна связь между полученным результатом и реальным движением космических объектов. Тем более трудно визуализировать это в уме или на рисунке. Для постановки задачи требуется интрига, задача, возможно даже фантастическая. Поэтому, повторяя теорию, отмечаем, что эти знания потребуются чуть позже на уроке для решения практической задачи.

Учащиеся были поделены на четыре группы в соответствии с количеством возможных решений. Каждая, пользуясь компьютером, производит моделирование в симуляторе. Модель заранее была подготовлена учителем и загружена в OrbitXplorer. Параметры модели можно увидеть на рис. 2, а результат – на рис. 3. Файл модели можно скачать с сайта "Стеллария" [5]. Итак, наш спутник – тело № 3, который в начальных условиях отстаёт в соревновании.



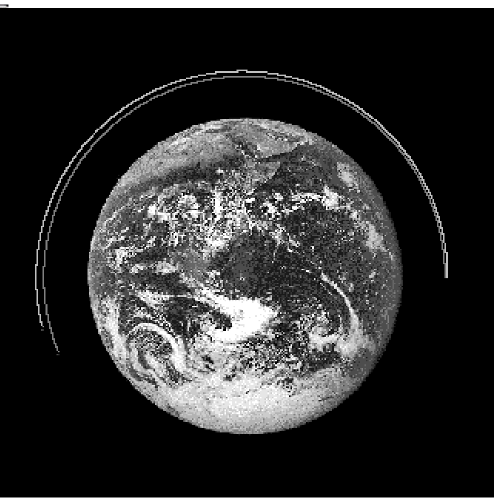



Рис. 2. Параметры модели в OrbitXplorer. Рис. 3. Результат моделирования.

Защита работ производится коллегиально, с демонстрацией на экране с компьютера учителя. Перед защитой у многих учащихся возникает вопрос: " А верно ли моделирование и какой результат должен получиться?"

Точность программы достаточна для учебных целей, поэтому моделирование, разумеется, можно считать верным. А вот желаемого результата достигает только группа, которая в результате включения ракетного двигателя уменьшила скорость (скорость вдоль оси *y* была изменена с 7100 м/с на 6900 м/с). Параметры подбираются в ходе работы в соответствии с рекомендациями учителя.

Уменьшение скорости меняет параметры орбиты: она становится эллиптической, при этом полуось эллипса оказывается меньше радиуса первоначальной круговой орбиты, период обращения спутника по третьему закону Кеплера уменьшается. Кстати, при значительном уменьшении скорости наш спутник столкнётся с Землёй, поэтому здесь важно правильно подобрать значение конечной скорости.

В работе отрабатывается УУД «Логические действие сравнения». Сравниваются возможные варианты решения и получившиеся результаты. Также сравниваются привычные нам принципы изменения скорости тела на Земле и при движении по орбите. Действие, предпринятое для правильного решения, на первый взгляд противоречит нашим обычным жизненным представлениям.

В ходе работы учащиеся активизировали продуктивное взаимодействие как внутри групп, так и между группами в процессе демонстрации результатов и обсуждения. Апробация показала, что на уроке царил дух соревнования, заинтересованности. Такого рода уроки позволяют не просто отработать какую-то часть умений (умение решать теоретические задачи), а позволяет активизировать творческую работу мозга по связыванию множества уже имеющихся знаний, умений и новой информации. Фрагмент урока представлен в видеоролике [6]. Разработка послужила основой работы № 4 тетради-практикума по предмету "Астрономия 10-11" [7].

Примерно в том же формате работу можно проводить в рамках курса информатики, тема «Моделирование» в 9-11 классах. Решение такой немного фантастической, но всё же практической задачи позволяет продемонстрировать учащимся, что технические устройства и IT технологии создаются человеком не как самоцель, а призваны помогать человеку в решении различных практических задач, в частности, связанных с познанием окружающего мира. Возможно проведение работы и на уроках физики в рамках соответствующей темы.

Опыт показал, что учащиеся работают с моделированием в гравитационных симуляторах с большим удовольствием. Это ещё одна причина, почему в учебном процессе следует использовать подобную технологию. Приучая детей к тому, что получать знание – это радость, мы формируем желание продолжать учиться в будущем, всю жизнь, в порядке самообразования, тем самым реализуя известный принцип «учить учиться».

**Список литературы**


1. Nagliadnoe izobrazhenie gravitatcii. E`lektronny`i` resurs [Visual image of gravity. Electronic resource]:https://youtu.be/EIEOGoBA4FA.
2. Educational Software «Orbit Xplorer». Electronic resource:http://www.ottisoft.com/orbit_x.htm.
3. Gravitas. A fully scriptable, real-time 3D gravity simulator. http://gravitas.sourceforge.net/.
4. Makovetckii` P.V. Makovetckii` P.V. Smotrivkoren`! Glavnaia redaktciia fiziko-matematicheskoi` literatury` izdatel`stva «Nauka» [Makovetsky P.V. Look at the root! Main editors of the physical and mathematical literature of the publishing house "Science"]. 1976. 448 c.
5. Modeliruem zapusk sputneykov v gravitatcionnom simuliatore. E`lektronny`i` resurs [We simulate the launch of satellites in a gravitational simulator. Electronic resource]:http://stellaria.school/page/satellites.
6. Fragment uroka astronomii v 11 classe po nebesnoi` mehanike. E`lektronny`i` resurs [Fragment of an astronomy lesson in 11th grade in celestial mechanics]. Electronic resource: https://youtu.be/l5vgFEnhhw0.
7. Kondakova E.V.Astronomy. Workbook. Grades 10-11: studies. allowance for obscheobrazovat. organizations: baseline [Astronomiia. Tetrad`-praktikum. 10-11 classy`: ucheb. posobie dlia obshcheobra-zovat. organizatcii`: bazovy`i` uroven`]/ Kondakova E.V., Charugin V.M. M.: Prosveshchenie, 2018.


## USING OF THE GRAVITATIONAL SIMULATOR ON THE PHYSICS, ASTRONOMY, COMPUTER SCIENCES LESSONS

**Klykov Dmitry Y.**
teacher of Computer Sciences and Astronomy
dyuk108@gmail.com
Moscow
School № 1566, Moscow

**Kondakova Elena V.**
Associated Professor
evkondakova@gmail.com
Yelets
Bunin Yelets State University

**Abstract.** The article focuses on computer modeling application for demonstration of gravitational interactions. Using of the Orbit Xplorer simulator in Astronomy Lab practicum is given as an example. Solving of the specially selected laboratorial tasks during the studies of Astronomy, Physics, Computer Sciences courses in schools involve the students into the creative works, due to what we get new results about the subject: knowledge, solutions, intellectual and materials products.

**Keywords:** gravitation, gravitational simulator, n-body problem, modeling

УДК 372

# СОЦИОКУЛЬТУРНЫЙ ПОДХОД К ФОРМИРОВАНИЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ (НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ»)

**Щенкова Анастасия Юрьевна**
магистрант
angelok.55@mail.ru
Елец

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

**Аннотация.** *Введение.* На сегодняшний момент среди проблем математического образования самой главной является отсутствие мотивации у школьников, они не видят в математических знаниях ценности, а процесс обучения становится для них скучным. Тем самым, изучая математику, они, в лучшем случае, заучивают формулы, теоремы и их доказательства, но при этом не понимают всю красоту содержания этого предмета. Эту проблему следует рассматривать в контексте ценностно-ориентированного подхода. В данной статье рассмотрены особенности процесса формирования математических понятий с позиций культурно-ценностного подхода к образованию. Рассмотрены сложности в освоении школьниками темы «Квадратичная функция». Цель статьи – представить комплексный подход к преподаванию данной темы. В качестве примера рассмотрен фрагмент факультатива по математике на тему «Квадратичная функция».*Материалы и методы.* Рассматривали методику формирования деятельности школьников по применению и систематизации понятий, рассмотрели методические основы формирования у школьников научных понятий в процессе обучения, анализировали методики формирования представлений о функции.*Результаты исследования.* Материалы исследования указывают на проблему формирования понятий у школьников в процессе обучения - отсутствие мотивации. Для исследования мы взяли тему по математике «Квадратичная функция». В ходе исследования установлено, что для успешного усвоения понятий в рамках данной темы необходимо понятие «функция» ввести конкретно-индуктивным путем, важно также немалое внимание уделить графику, ее формулировке на словесном, графическом и аналитическом языках, т.к. с их помощью обучающиеся легче разбираются в свойствах функций, учителю в свою очередь необходимо грамотно составить конспект урока, замотивировать обучающихся и поощрять успехи учеников. На основе теоретического материала мы разработали факультатив на тему «Квадратичная функция», для наглядности мы покажем фрагмент из занятия: в нем мы расскажем, как найти площадь сегмента параболы и треугольника, стороны которого являются касательными параболы.*Обсуждение и заключения.* Автор считает, что эффективное формирование ценностного отношения обучающихся к математике происходит при выполнении следующего комплекса педагогических условий: ориентирование школьников в ценностях математического образования; формирования мотивационной готовности обучающихся к математическому образованию. Традиционная методика обучения математическим понятиям имеет существенный недостаток: формализм в усвоении понятий. Эту проблему мы предлагаем решить с помощью социокультурного подхода к усвоению. Он способствует более глубокому, осознанному усвоению, повышает интерес к предмету.

**Ключевые слова:** функция; понятие; мышление.

Необходимой и неотъемлемой частью всего образования в школе является математическое образование. Без базовой математической подготовки невозможно стать образованным современным человеком. Для жизни в современном обществе важным является формирование математического стиля мышления, проявляющегося в определенных умственных навыках.

В современном обществе происходят перемены, которые требуют ускоренного совершенствования образовательного пространства, определения целей образования, учитывающих государственные, социальные и личностные потребности и интересы.

На сегодняшний момент проблема формирования понятий у обучающихся является актуальной, поскольку при обучении происходит доминирование формального подхода – заучивание формулировок понятий, теорем, доказательств к ним.

В школе учащиеся знакомятся с квадратичной функцией, ее свойствами и графиком. Понятие функции является одним из важных понятий математической науки и представляет большую ценность для школьного курса математики. Русский математик и педагог А. Я. Хинчин указывал, что понятие функциональной зависимости должно стать не только одним из важных понятий школьного курса математики, но тем основным стержнем, проходящим от элементарной арифметики до высших разделов алгебры, геометрии и тригонометрии, вокруг которого группируется всё математическое представление.

При изучении материала учащиеся формально усваивают определение понятия квадратичной функции, свойства квадратичной функции. Тема «Квадратичная функция» в первую очередь знакомит учащихся с данной функцией как с математической моделью, описывающей многие зависимости между реальными величинами, учит школьников исследовать функцию, строить график и читать по нему свойства этой функции, учит вырабатывать алгоритм действий при решении задач, делать выводы на основе исследований, способствует успешному применению знаний о функциях к изучению разнообразных процессов и явлений.

Понимание функции как математической модели реальных процессов определяет общекультурный аспект изучения математики. В связи с этим учащиеся должны уметь видеть функциональную зависимость не только в алгебраических формулах, но и в других школьных предметах, и в жизни. Такое построение учебного материала отвечает принципу целостности образования [3, с. 264-265].

При изучении данной темы закладываются основы аналитического мышления, формируется соответствующая интуиция, развивается логика и умение применять полученные знания в других науках.

В процессе изучения материала часто перед обучающимися стоит проблема усвоения понятий наибольшего и наименьшего значения функции, возрастания и убывания функции. Зачастуюучащиеся не умеют определить эти свойствапо графику, испытывают трудности в нахождении значения функции по значению аргумента, не понимают вид записи $f(x)$.

В основном освоение темы «Квадратичная функция» поднимает учащихся на качественно новую ступень овладения содержанием школьной математики.

Научные понятия являются важнейшим элементом систем научных знаний. Следовательно, формирование понятий занимает центральное место в обучении. По словам русского философа Е. К. Войшвилло, понятие представляет собой мысль – результат обобщения (и выделения) предметов или явлений того или иного класса по более или менее существенным (а потому и общим для этих предметов и в совокупности специфическим для них, выделяющим их из множества других предметов и явлении) признакам [1].

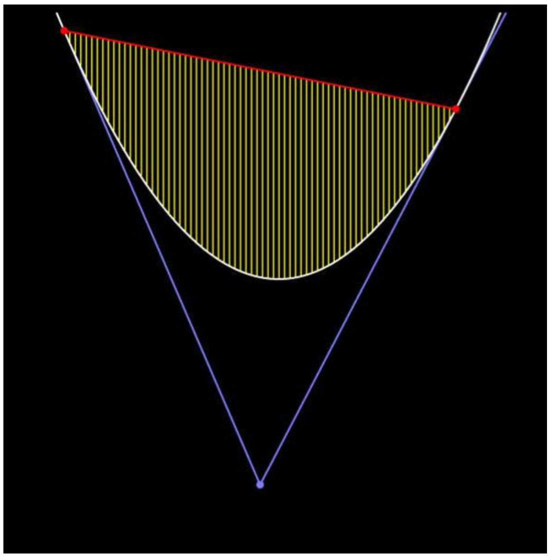
Однако Н. Л. Менчинская не согласна с определениями, где понятие трактуется как «мысль». Она дает развернутое определение: словом «понятие» мы обозначаем обобщенное знание, отражающее существенные свойства предметов или явлений, поэтому понятие есть знание, но не мысль [2, с. 38]. В педагогическом энциклопедическом словаре понятие также определяется как форма мышления.

В настоящее время перед учителем стоит важная проблема – мотивированность учащихся к изучению предмета. В процессе изучения материала учащимся необходимо самостоятельно овладевать материалом, получать новую информацию с использованием самостоятельных работ для успешного освоения понятий. При всем этом учителю следует тщательно и грамотно подходить к оформлению конспекта урока, чтобы тем самым в процессе обучения заинтересовать обучающихся, но и не стоит забывать о поощрениях успехов учащихся.

Успешное овладение материалом будет эффективным, если понятие «функция» вводится конкретно-индуктивным путем, при использовании генетического подхода; изучение свойств будет происходить комбинированным методом; отдельное внимание будет уделяться формулировке свойств на словесном, графическом и аналитическом языках. Графики функций помогают понять многие свойства функций, такие как монотонность на множестве, нули функции, области положительных и отрицательных значений функций [3, с. 260-261].

В процессе изучения понятия функции, используя конкретно-индуктивный путь, необходимо примиенять метод проблемного изложения, т.е. разобрать несколько задач с подчёркиванием существенных признаков понятия (одна переменная зависит от другой, однозначная зависимость). Примеры должны быть разнообразными по содержанию, несущественные признаки должны варьироваться (несущественным является способ задания функции: формула, график, таблица).

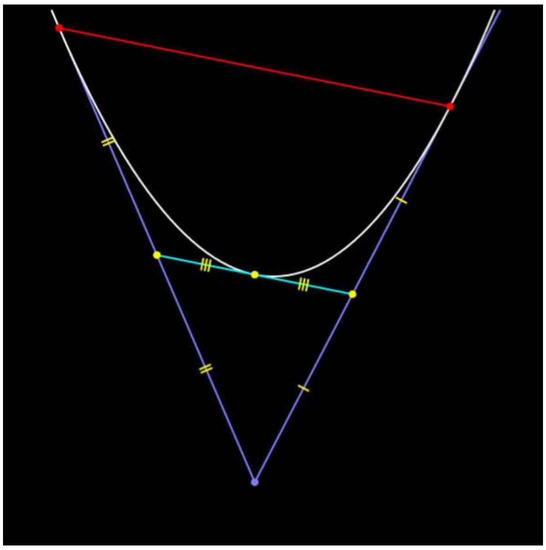
Приведем фрагмент факультатива по алгебре на тему: «Квадратичная функция». Рассмотрим произвольную параболу. Две ее произвольные точки соединим отрезком. Часть плоскости, ограниченную этим отрезком и дугой параболы, называем сегментом параболы. Через концы рассматриваемого отрезка проведем касательные к параболе. Архимед доказал, что площадь сегмента равна удвоенной площади части плоскости, образованной этими касательными и дугой параболы.



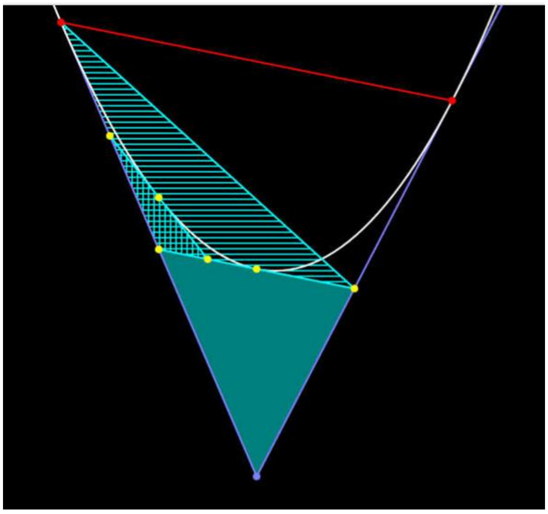
Доказательство основано на удивительно простом свойстве взаимного расположения параболы и треугольника, образованного касательными и хордой. А именно, проведем среднюю линию этого треугольника, параллельную хорде параболы. Она касается параболы! Это несложно доказать при помощи метода координат. Уравнения касательных к параболе, заданной уравнением $y = ax^2$ , проходящих через точки $B(b; ab^2)$ и $C(c; ac^2)$ соответственно, легко найти: $y = 2abx - ab^2$ и $y = 2acx - ac^2$ соответственно. Решая уравнение $2abx - ab^2 = 2acx - ac^2$, находим $2x = b + c$ и, следовательно, ордината точки $A$ равна $bc(b + c) - ab^2 = abc$. Таким образом, абсцисса точки $A$ пересечения касательных – среднее арифметическое чисел $b$ и $c$, а ордината равна произведению $abc$.

Угловой коэффициент прямой $BC$ равен частному от деления разности ординат $(ac^2 - ab^2)$ точек $C$ и $B$ на разность $(c - b)$ их абсцисс, то есть числу $a(b + c)$. Прямая $BC$ задана уравнением $y = a(b + c)x - abc$, а параллельная ей прямая, проходящая через точку $A$ , задана уравнением $y = a(b + c)x - a(\frac{b^2+c^2}{2})$. Правую часть уравнения средней линии треугольника $ABC$, параллельной прямой $BC$, получаем как среднее арифметическое правых частей уравнений, задающих прямую $BC$ и параллельную ей прямую, проходящую через точку $A$. Таким образом, $y = a(b + c)x - a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$. Очевидно, мы получили уравнение прямой, касающейся параболы!

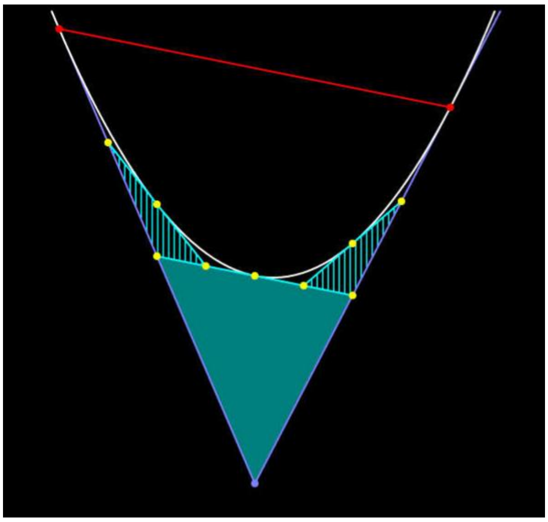
А можно было обойтись без вычислений: выбрав в качестве направления оси ординат направление оси симметрии параболы, ось абсцисс направив параллельно прямой $BC$ и выбрав начало координат так, чтобы оно совпало (в новой системе координат) с вершиной параболы, мы сводим дело к известному утверждению: касательная к параболе в любой ее точке делит пополам отрезок между началом координат и проекцией на ось абсцисс точки, в которой проведена касательная. Из обоих способов доказательства следует, что точка касания делит среднюю линию треугольника пополам.



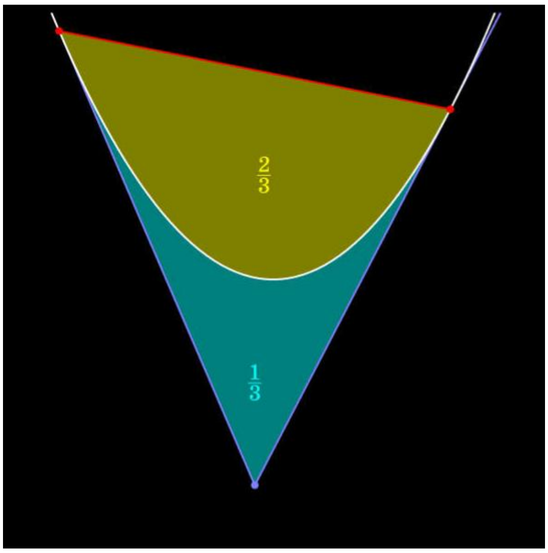
Средние линии любого треугольника делят его на четыре равновеликие части. Поэтому площадь любой из этих частей равна одной четвертой части площади всего треугольника. Повторим построение: проведем среднюю линию еще одного треугольника, образованного хордой параболы и двумя касательными к ней. Площадь заштрихованного треугольника равна одной четвертой части площади треугольника, среднюю линию которого мы только что провели. Площадь дважды заштрихованного треугольника равна одной восьмой части площади заштрихованного треугольника.



Поэтому его площадь равна одной тридцать второй части площади исходного треугольника. А в сумме со своим аналогом он составляет одну шестнадцатую часть площади исходного треугольника.



Такие построения можно продолжить: в каждом из четырех треугольников, образованных касательными к параболе и ее хордами, можно провести среднюю линию. От исходного треугольника будут отрезаны 4 треугольника. (На рисунке показаны только точки касания проводимых средних линий: сами средние линии практически слились с параболой!) Для наших вычислений важно, что мы всякий раз будем отрезать вчетверо меньшую площадь, чем до этого. Таким образом, осталось вычислить сумму геометрической прогрессии с первым членом 1/4 и знаменателем 4. Обозначив сумму этой прогрессии буквой x и умножим все члены прогрессии на 4, получаем уравнение 4x=1+x. Решая уравнение, получаем ответ: x=1/3. Площадь криволинейного треугольника, образованного касательными и дугой параболы, равна 1/3 площади треугольника. А остальная площадь – это площадь сегмента. Таким образом, площадь сегмента равна 2/3 площадь треугольника.




**Список литературы:**

1. Войшвилло Е.К. Понятие. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1967.
2. Менчинская Н.А. Проблемы обучения, воспитания и психического развития ребенка: Избр. психол. тр. М.: Моск. психол.-соц. ин-т. Воронеж: МОДЭК, 1998.
3. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. М.: Дрофа, 2005.

# SOCIOCULTURAL APPROACH TO FORMATION OF ACTIVITY OF SCHOOL STUDENTS ON DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL CONCEPTS (ON THE EXAMPLE OF STUDYING OF THE SUBJECT "QUADRATIC FUNCTION")

**A.Y. Shchenkova**
master 2-year
angelok.55@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

**Abstract.** *Introduction.* At the moment, among the problems of mathematical education the most important is the lack of motivation among students, they do not see the value of mathematical knowledge, and the learning process becomes boring for them. Thus, studying mathematics, they, at best, memorize formulas, theorems and their proofs, but do not understand the beauty of the content of this subject. This problem can most often be observed in the context of value-oriented approach. This article discusses the features of the process of formation of mathematical concepts from the standpoint of cultural value approach to education. The difficulties in teaching students the theme "Quadratic function". The purpose of the article is to present an integrated approach in teaching this topic for the successful assimilation of the material. As an example, a fragment of an elective in mathematics on the topic "Quadratic function"is considered.

*Materials and methods:* we Considered the method of formation of students 'activity on the application and systematization of concepts, considered the methodological basis of the formation of students' scientific concepts in the learning process, analyzed the methods of formation of ideas about the function.

*Results:* The materials of the study indicate the problem of formation of concepts in students in the learning process, lack of motivation, without realizing the essence of the information. For research, we took the topic of mathematics "Quadratic function". The study found that for the successful assimilation of concepts in this topic, it is necessary to introduce the concept of "function" specifically-inductive way, it is also important to pay considerable attention to the schedule, its formulation in verbal, graphic and analytical languages, because. with their help, students are easier to understand the properties of functions, the teacher, in turn, need to competently make a summary of the lesson, motivate students and encourage the success of students. On the basis of theoretical material we have developed an elective on the topic "Quadratic function", for clarity, we will show a fragment from the lesson: in it we will tell how to find the area of the segment of the parabola and triangle, the sides of which are tangent parabola.

*Discussion and Conclusions:* The author believes that the effective formation of value attitude of students to mathematical education occurs when the following set of pedagogical conditions: orientation of students in the values of mathematical education; formation of motivational readiness of students for mathematical education. The traditional method of teaching mathematical concepts has a significant drawback: formalism in the assimilation of concepts. We propose to solve this problem with the help of socio-cultural approach to assimilation. It promotes a deeper, more meaningful learning, promotes interest to the subject.

**Keywords:** function; concept; thinking.

УДК372.851

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

**Агафонов Павел Александрович**
аспирант
agafon85@rambler.ru
г. Москва

ГБОУ г. Москвы "Школа 2070"

**Аннотация.** Статья посвящена анализу возможностей динамических сред для формирования у школьников умений доказывать геометрические утверждения в электронной образовательной среде. Обозначена актуальность темы исследования. Сделан вывод о том, что GeoGebra – это эффективный инструмент формирования умений школьников доказывать геометрические утверждения в условиях электронной образовательной среды.

**Ключевые слова:**Система динамической геометрии; геометрические утверждения; доказательные рассуждения; геометрия; электронная образовательная среда; программный продукт.

Программа динамической геометрии (DGS) - это среда, позволяющая создавать динамические чертежи, т.е. компьютерные геометрические чертежи-модели, исходные данные которых можно варьировать с сохранением всего алгоритма построения, просматривать их и работать с ними.

Прототипом современных DGS следует считать первую графическую станцию Sketchpad, созданную в 1963 году американским ученым в области информатики Иваном Сазерлендом. Sketchpad позволяла вводить ограничения и задавать взаимосвязи между сегментами и дугами. С ее помощью можно было рисовать горизонтальные и вертикальные линии и комбинировать их в различные фигуры. Их можно было копировать, перемещать, поворачивать или масштабировать, сохраняя их основные свойства.

Тому факту, что применение возможностей Sketchpad к решению образовательных задач было впервые найдено во Франции, мы обязаны радикальной реформе математического образования 60-х - 70-х годов, которая наиболее бурно проходила именно в этой стране, под влиянием интереса к деятельности и научным результатам группы математиков, работавших под псевдонимом Никола Бурбаки[6].

Идея создания программы CabriGeometre явилась своего рода реакцией на распространившийся в стране формализм в преподавании геометрии. Описание образовательных возможностей этой программы было изложено Жан-Мари Лаборд (Jean-MarieLaborde) в книге "Cabri-geometre", изданной в 1985 году. А уже через год, в 1986 году, его студенты Филипп Кейт (PhilippeCayet), Ив Булак (YvesBaulac) и Франк Билимен (FranckBellemain) подготовили программное обеспечение для поддержки курса динамической геометрии. Одним из недостатков Cabri - geometre является невозможность аналитического задания геометрических объектов, а также сбора и обработки статистических данных, что значительно ограничивает возможности проведения конструктивных и численных разведочных экспериментов.

Параллельно с развитием Cabri разрабатывалась и аналогичная программа TheGeometr'sSketchpad («Блокнот геометра»). Ее первая версия появилась в 1989 году. Автором данного программного продукта стал Николас Джакив (NicholasJackiw). В 2005 году программа TheGeometer'sSketchpad русифицирована

Институтом новых технологий (г. Москва). Данная DGS позволяет осуществлять построение геометрических мест точек по их уравнениям, однако четко разделяет алгебраически и геометрически заданные объекты, не позволяя создавать из них общую геометрическую конфигурацию, варьировать способ задания и описания построенного объекта.

Данная программа позволяет заносить данные компьютерного эксперимента в электронную таблицу, но не снабжена средствами статистического анализа этих данных. Программа снабжена простым и удобным в использовании инструментом для ведения записей в графическом окне, однако в нем не предусмотрены средства для создания динамических текстов. Эта особенность программы значительно сужает спектр контрольных экспериментов на проверку справедливости метрических соотношений.

Русифицированными являются также DGSGeoNext, разрабатываемая с 1999 года на кафедре математики и дидактики в Университете Байройта (Г ермания), и GeoGebra, первая версия которой появилась в 2002 году благодаря усилиям австрийского математика Маркуса Хохенвартера (MarkusHohenwater). Ограничения программы GeoNext связаны с тем, что в ней количество измерительных инструментов весьма ограничено.

Программа GeoGebra обладает всеми достоинствами «Живой математики» за исключением простоты работы инструментов по созданию текстов. Однако этот недостаток компенсируется возможностями получения динамических записей, сочетанием и варьированием разных способов задания геометрических объектов и наличием встроенных инструментов статистического анализа данных, занесенных в электронную таблицу

Кроме того, в GeoGebra предусмотрены возможности вывода протокола построения динамической модели и отслеживания конструктивных связей элементов динамического чертежа, что является очень важным условием для обоснования корректности динамической модели.

Собственной разработкой российских программистов является «Математический конструктор». Создатель этой программы - фирма 1С. Первая версия её была выпущена в 2006 г. Главным отличием от остальных DGS является ориентация программы не на учащихся, а на учителей, а также подготовленных специалистов, которые занимаются созданием электронных образовательных ресурсов (ЭОР), часто называемых манипуляторами. Программа обладает большим спектром инструментов для построения виртуальных динамических моделей геометрических фигур, графиков функций и проведения компьютерных экспериментов.

Проведенный нами анализ показывает, что наибольшими возможностями для проведения компьютерных экспериментов обладает DGSGeoGebra , т.к. поддерживает все необходимые их виды. Данный программный продукт пользуется наибольшей популярностью, т.к. переведен более чем на 50 языков и является свободно распространяемым. Также данная DGS – кроссплатформенная и подходит для всех уровней образования. Сегодня в ее совершенствовании может принимать участие любой желающий, т.к. она обладает открытым программным кодом. GeoGebra написана на языке Java, поддерживает 2D и 3D версии, имеется портативная версия. Программа получила несколько наград в области образовательного программного обеспечения в Европе и США.

Таблица 1.

<table>
<tr><th>Виды экспериментов</th><th>Cabri</th><th>«Живая математика»</th><th>Математи ческий конструктор</th><th>GeoGebra</th></tr>
<tr><td>1. Конструктивный эксперимент.</td><td>Выполнение построений геометрических фигур, но не аналитически заданных</td><td>Выполнение построений геометрических фигур при любом способе задания с невозможностью комбинации различно заданных фигур.</td><td colspan="2">Выполнение любых построений.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. Разведочные (предварительные) компьютерные эксперименты</td><td>Нетвозможности записи данных в таблицу.</td><td colspan="3">Имеется возможность записи в таблицу</td></tr>
<tr><td>Нет средств анализа статистических данных</td><td>Нет средств статистического анализа данных</td><td colspan="2">Есть средства статистического анализа.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Контрольные компьютерные эксперименты</td><td rowspan="2">Нет средств создания динамических текстов. Имеется возможность параметрическог о задания объектов</td><td colspan="3">Есть средства создания динамических текстов. Имеется возможность параметрического задания объектов.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Параметр не может принимать случайные значения.</td><td>Параметр может принимать случайные значения.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4. Компьютерные визуализации доказательств</td><td colspan="4">Имеется возможность анимировать динамическую модель, выделять объекты цветом, изменять шрифт, последовательно отображать надписи и элементы чертежа с помощью активных кнопок.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Предусмотрены возможности выводапротокола построения. Возможность условного отобра-жения объектов и записейзадания цветовыхизменени й</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5.Модифицирующие компьютерные эксперименты | Можно расширять и сужать область допустимых значений параметров. Варьировать позиционные свойства свободных элементов чертежа. Отображать и скрывать элементы чертежа. Строить образы фигур при геометрическом преобразовании | | |
| | - | Можно исследовать «след» перемещаемого объекта. | |
| | Нельзя варьировать способ задания объекта | | Можно варьировать способ задания объекта |

*Сравнительный анализ возможностей использования систем динамической геометрии при изучении геометрии*

**Список литературы**

1. Рыжик В.И.(2000) Геометрия и компьютер//Компьютерные инструменты в образовании.№6.С. 7-11
2. Рыжик В.И.(2003) Исследовательские сюжеты для среды TheGeometer'sSketchpad //Компьютерные инструменты в образовании.№3.С. 14-20
3. Сербис И. Н. (2008) Использование интерактивной геометрической среды при обучении школьников планиметрии / Известия РГПУ им. А.И. Герцена 2008.№63-2, С.176-179
4. Розов Н.Х.(2003) Некоторые проблемы применения компьютерных технологий и продуктов при обучении в средней школе // Вестн. Моск. гор.пед. ун-та. Сер. Информат. и информатиз. образ.№ 1.С. 102-106.

# COMPARATIVE ANALYSIS OF THE POSSIBILITIES OF USING DYNAMIC GEOMETRY SYSTEMS IN THE STUDY OF GEOMETRY

**P.A. Agafonov**
postgraduate
agafon85@rambler.ru
Moscow

GBOU city of Moscow "School 2070"

**Abstract.**The article is devoted to the analysis of the possibilities of dynamic environments for the formation of students ' skills to prove geometric statements in the electronic educational environment. The relevance of the research topic is indicated. It is concluded that GeoGebra is an effective tool for the formation of students' skills to prove geometric statements in an electronic educational environment.

**Keywords:**System of dynamic geometry; geometric statements; evidential reasoning; geometry; electronic educational environment; software product

**References**


1. Rizhik V. I. (2000)Geometriia i komp`iuter[Geometry and computer] // Computer tools in education.No. 6.C. 7-11
2. Rizhik V. I. (2003)Issledovatel`skie siuzhety` dlia sredy` The Geometer's Sketchpad[Research plots for the Geometry's Sketchpad environment] // Computer tools in education.No.
3. Serbis I. N. (2008)Ispol`zovanie interaktivnoi` geometricheskoi` sredy` pri obuchenii shkol`nikov planimetrii[The use of interactive geometric environment in teaching students planimetry] / news RSPU. A. I. Herzen 2008.No. 63-2, Pp. 176-179.
4. Rozov N.X.(2003)Nekotory`e problemy` primeneniia komp`iuterny`kh tekhnologii` i produktov pri obuchenii v srednei` shkole[Some problems of application of computer technologies and products in teaching in the secondary school] // Vestn. Mosk. mountain.PED. UN-TA. Ser. Inform. and computer science. image. No. 1.P. 102-106.

**Научный журнал**

# C O N T I N U U M

# МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ОБРАЗОВАНИЕ

*Выпуск №1(13) / 2019*

*Редактор – Н.П. Безногих*
*Компьютерная верстка и дизайн обложки – М.В. Подаев*
*Техническое исполнение – В.М. Гришин*
Формат А-4 (74 п.л).
Гарнитура Times. Печать трафаретная
Печ.л. 4,7. Уч.-изд.л. 4,3
Тираж 1000 экз. Заказ № 19
Подписано в печать 25.03.2019
Дата выхода в свет 26.03.2019
Свободная цена

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-69418 от 14 апреля 2017 г.

Адрес редакции и издателя:
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1
E-mail: pmi.elsu@gmail.com
Сайт редколлегии: http://pmi.elsu.ru

Подписной индекс журнала **№64987** в каталоге периодических изданий
органов научно-технической информации агентства «Роспечать»

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, Липецкая область, г. Елец, Коммунаров, 28,1