МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ И.А. БУНИНА»

CONTINUUM

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск №2 (14) / Елец, 2019

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1)

THE FOUNDER AND THE PUBLISHER:

The Federal State Educational Government-Financed Institution of Higher Education «Bunin Yelets State University» (399770, Lipetsk region, Yelets, st. Kommunarov, 28, 1)

ISSN 2500-1957

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

CONTENTS

ASPECTS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATICS

INNOVATIONS FEDERAL STANDARDS AND EDUCATIONAL TECHNOLOGIES IN THE TEACHING OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.956.6

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СМЕШАННО-СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ

Александр Николаевич Зарубин
д.ф.-м.н., профессор
matdiff@yandex.ru
г. Орел
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева

Елена Викторовна Чаплыгина
к.ф.-м.н., доцент
lena260581@yandex.ru
г. Орел
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева

Аннотация. Исследуется задача Трикоми для функционально-дифференциального смешанно-составного опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Доказаны теоремы единственности и существования дважды непрерывно дифференцируемого решения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, интегральное уравнение, разностное уравнение, функциональное запаздывание и опережение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения в частных производных смешанно-составного типа [1], [2] служат математическими моделями для многих прикладных задач (нелинейная оптика, волны в магнитоактивной плазме, диссипативные процессы в проводящих средах, внутренние волны, спиновые волны) [3]. Рассматриваемая работа посвящена методу исследования краевой задачи Трикоми для уравнений, содержащих произведение кратных неприводимых функциональных операторов

$$\boldsymbol{LQ}u(x,y)=0, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{L}\equiv\partial^2/\partial x^2+(\operatorname{sgn} y)\partial^2/\partial y^2 \text{ -} \tag{2}$$

оператор [4] Лаврентьева – Бицадзе;

$$\boldsymbol{Q}\equiv\prod_{r=1}^{p}(A_r(x)+\sum_{k=1}^{n}B_{kr}(x)\mathbf{P}_x^{x\text{-}\alpha_1^k(x)}H(x)+\sum_{k=1}^{m}C_{kr}(x)\mathbf{P}_x^{x\text{-}\alpha_2^k(x)}H(x_3-x))^{l_r} \;- \tag{3}$$

функциональный опережающе-запаздывающий оператор;

$\mathbf{P}_x^{\theta(x)}$ - оператор сдвига по переменной x: $\mathbf{P}_x^{\theta(x)}H(x)u(x,y)=H(x-\theta(x))u(x-\theta(x),y);$

$\mathbf{P}_x^{\theta(x)}H(x_3 - x)u(x,y) = H(x_3 - x + \theta(x))u(x - \theta(x), y)$; $H(\xi)$ -функция Хевисайда; $A_r(x), B_{kr}(x), C_{kr}(x)$-непрерывные достаточно гладкие функции; $n, m, p, l_r \in N$; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$- сохраняющие ориентацию взаимно обратные диффеоморфизмы класса C^2, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_1(x) < x, \alpha_1'(x) > 1\, (\alpha_1'(x) < 1) \text{ и } \alpha_2(x) > x, \alpha_2'(x) < 1\, (\alpha_2'(x) > 1),$$

то есть представляющие собой растягивающе (сжимающе) - запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения, для которых выполняются тождества

$$\alpha_{3-j}(\alpha_j(x)) = x \; (j = 1,2), \tag{4}$$

где x принадлежит области определения отображения $\alpha_j(x)$. Обозначим $x_0 = 0$ и зададим конечную последовательность x_n любым из следующих равносильных вследствии тождеств (4) равенств:

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}), \;\; x_{n+1} = \alpha_2(x_n) \tag{5}$$

предполагая, что значения x_n определены и $\alpha_2(x_0) > 0$.

Например, если $n = -\overline{2{,}5}$, то, в силу (5), $x_{-2} = \alpha_1^2(x_0) < x_{-1} = \alpha_1^1(x_0) < 0 =$
$= x_0 = \alpha_2^0(x_0) < x_1 = \alpha_2^1(x_0) < x_2 = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0) < x_4 = \alpha_2^4(x_0) < x_5 = \alpha_2^5(x_0)$.

Здесь и далее обозначено $\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\ldots(\alpha_j(x))\ldots))}_{m\ раз}$, если $m > 0, \alpha_j^0(x) \equiv x$;

$\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(\ldots(\alpha_{3-j}(x))\ldots))}_{-m\ раз}$, если $m < 0,\; j = 1,2$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФАКТОРИЗАЦИЯ

Без ограничения общности и для наглядности, рассмотрим уравнение (1) в смешанной области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, когда $l_r = 1; n = 2, m = 1, B_{1r}(x) = 0,\; B_{2r}(x) = -B_r(x)$, $C_{1r}(x) = C_r(x)$, а оператор (3) (произведение неприводимых функциональных опережающе-запаздывающих операторов) имеет вид

$$\boldsymbol{Q_1} \equiv \prod_{r=1}^{p}(A_r(x) - B_r(x)\mathbf{P}_x^{x-\alpha_1^2(x)}H(x) + C_r(x)\mathbf{P}_x^{x-\alpha_2(x)}H(x_3 - x)); \tag{6}$$

то есть уравнение

$$\boldsymbol{LQ_1}\, u(x,y) = 0\;, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{L}$-оператор Лаврентьева – Бицадзе (2), в области D с линией изменения типа $I = \{(x,y): x_0 < x < x_3, y = 0\}$; $D^+ = D_0^+ \cup \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J$ и $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ - соответственно эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y): x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < \sigma_k(x)\} \;\; (k = -2,-1,0,1,2,3);$$

$$D_k^- = \{(x,y): -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1,\;\; -x_1/2 < y < 0\} \;\; (k = -2,-1,0,1,2,3);$$

$$\sigma(x) = \bigcup_{k=0}^{2} \sigma_k(x),\; x_0 < x < x_3$$

и $\sigma_k(x) = h + \sqrt{\alpha_1^k(x)(x_1 - \alpha_1^k(x))},\, x_k \le x \le x_{k+1}\; (k = -2,-1,0,1,2,3)\; (0 < h \equiv const)$;

то есть $\sigma_0(\alpha_1^k(x)) = \sigma_k(x)\ (k = -2,-1,0,1,2,3)$ и, в частности, $y = \sigma_0(x) = h + \sqrt{x(x_1 - x)}$ – полуокружность

$$(x - x_1/2)^2 + (y - h)^2 = (x_1/2)^2,\ x_0 \le x \le x_1;$$

$$J = J_1 \cup J_2,\ \text{где}\ J_k = \{(x,y): x = x_k, 0 < y < h\}\ (k = 1,2);\ I = \bigcup_{k=0}^{2} I_k,$$

$$I_k = \{(x,y): x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}\ (k = 0,1,2).$$

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$u(\alpha_1^2(x), y) = u(x - (x - \alpha_1^2(x)), y) = u(x - \tau_1(x), y),$$

$$u(\alpha_2(x), y) = u(x + (\alpha_2(x) - x), y) = u(x + \tau_2(x), y),$$

где $\tau_1(x) = x - \alpha_1^2(x) > 0,\ \tau_2(x) = \alpha_2(x) - x > 0.$

Задача T. *Найти в области* D *решение* $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap$ $\cap\, C^2(D \setminus (J \cup I))$ *уравнения (7), удовлетворяющее условиям*

$$u(x, \sigma_k(x)) = \varphi_k(x),\ x_k \le x \le x_{k+1}\ (k = 0,1,2), \tag{8}$$

$$u(x_0, y) = u(x_3, y) = 0,\ 0 \le y \le h; u(x,y) = 0,$$
$$(x,y) \in \overline{D}_k = \overline{D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k}\ (k = -2,-1,3), \tag{9}$$

$$u(x, -\alpha_1^k(x)) = \psi_k(x),\ x_k \le x \le \alpha_2^k(x_1/2)\ (k = 0,1,2), \tag{10}$$

условиям сопряжения

$$u(x,0-) = u(x,0+) = \omega(x),\ x_0 \le x \le x_3, \tag{11}$$

$$u_y(x,0-) = u_y(x,0+) = \nu(x),\ x_0 < x < x_3,\ x \ne x_1, x_2, \tag{12}$$

условиям согласования

$$\psi_0(x_0) = \varphi_0(x_0) = \varphi_2(x_3) = B_1(x_3) = C_1(x_0) = 0, \tag{13}$$

где $A_r(x), B_r(x), C_r(x)\ (r = \overline{1,p}),\ \varphi_k(x), \psi_k(x)\ (k = 0,1,2),\ \alpha_1(x),\ \alpha_2(x)$ *– заданные непрерывные достаточно гладкие функции.*

Положив

$$V(x,y) = \boldsymbol{Q}_1 u(x,y), \tag{14}$$

приведем уравнение (7), с учетом (2), к системе

$$\begin{cases} LV(x,y) \equiv V_{xx}(x,y) + (sgny)V_{yy}(x,y) = 0,\ (x,y) \in D, & (15) \\ Q_1 u(x,y) = V(x,y),\ (x,y) \in D; & (14) \end{cases}$$

которую в терминах функций

$$V_k^{\pm}(x,y) = V(x,y), (x,y) \in D_k^{\pm}\ (k = 0,1,2), \tag{16}$$

$$u_k^{\pm}(x,y) = u(x,y), (x,y) \in D_k^{\pm}\ (k = 0,1,2), \tag{17}$$

с учетом (6), (9), можно записать, согласно (14), (15), в форме матричной системы

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}\overline{V}(x,y) \equiv \overline{V}_{xx}(x,y) + (sgn\ y)\overline{V}_{yy}(x,y) = 0, (x,y) \in D_0^{\pm}, & (18) \\ \boldsymbol{Q}_1(x)\overline{u}^{\pm}(x,y) = \overline{V}(x,y), (x,y) \in D_0^{\pm}, & (19) \end{cases}$$

(здесь и далее $j = 1, 2$), где

$$\overline{V}(x,y) = (V_0^{\pm}(x,y), V_1^{\pm}(\alpha_2(x),y), V_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y))^T, \tag{20}$$

$$\overline{u}^{\pm}(x,y) = (u_0^{\pm}(x,y), u_1^{\pm}(\alpha_2(x),y), u_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y))^T, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{Q}_1(x)=\prod_{r=1}^{p}({}^{r}R(x)), \tag{22}$$

а матрица

$${}^{r}R(x)=({}^{r}\overline{R}_0(x),{}^{r}\overline{R}_1(x),{}^{r}\overline{R}_2(x))^T$$

имеет компоненты вида

$${}^{r}\overline{R}_0(x)=(A_r(x),C_r(x),0),\ {}^{r}\overline{R}_1(x)=(0,A_r(\alpha_2(x)),C_r(\alpha_2(x))),$$
$${}^{r}\overline{R}_2(x)=(-B_r(\alpha_2^2(x)),0,A_r(\alpha_2^2(x))).$$

Если определитель $\left|{}^{r}R(x)\right|\neq 0,\ x_0\leq x\leq x_1,$ то единственное решение $u(x,y)$ задачи T для уравнения (7) в области D в терминах функций (16), (17), (20), (21) может быть получено из (19) в форме

$$\overline{u}^{\pm}(x,y)=\boldsymbol{Q}_1^{-1}(x)\overline{\mathrm{V}}(x,y),\ (x,y)\in D_0^{\pm}, \tag{23}$$

где

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}(x)=\prod_{r=1}^{p}({}^{p-r+1}R^{-1}(x)), \tag{24}$$

и обратная матрица

$${}^{r}R^{-1}(x)=({}^{r}\overline{R}_0^{-1}(x),\ {}^{r}\overline{R}_1^{-1}(x),\ {}^{r}\overline{R}_2^{-1}(x))^T$$

имеет компоненты

$${}^{r}\overline{R}_0^{-1}(x)\left|{}^{r}R(x)\right|=(A_r(\alpha_2(x))A_r(\alpha_2^2(x)),-C_r(x)A_r(\alpha_2^2(x)),C_r(x)C_r(\alpha_2(x))),$$

$${}^{r}\overline{R}_1^{-1}(x)\left|{}^{r}R(x)\right|=(-B_r(\alpha_2^2(x))C_r(\alpha_2(x)),A_r(x)A_r(\alpha_2^2(x)),-A_r(x)C_r(\alpha_2(x))),$$

$${}^{r}\overline{R}_2^{-1}(x)\left|{}^{r}R(x)\right|=(B_r(\alpha_2^2(x))A_r(\alpha_2(x)),-B_r(\alpha_2^2(x))C_r(x),A_r(x)A_r(\alpha_2(x))),$$

причем

$$\left|{}^{r}R(x)\right|=A_r(x)A_r(\alpha_2(x))A_r(\alpha_2^2(x))-C_r(x)C_r(\alpha_2(x))B_r(\alpha_2^2(x)),$$

а для $\overline{\mathrm{V}}(x,y)$, согласно (8)-(13) и равенства (14), должна быть решена

Задача $\mathbf{T}_{\overline{\mathbf{V}}}$. *Найти в области* $D_0=D_0^+\cup D_0^-\cup I_0$ *решение* $\overline{\mathrm{V}}(x,y)\in C(\overline{D_0})\cap C^2(D_0)$ *уравнения (18), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\overline{\mathrm{V}}(x,\sigma_0(x))=\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\varphi}(x),\ x_0\leq x\leq x_1, \tag{25}$$

$$\overline{\mathrm{V}}(x_0,y)=\overline{\mathrm{V}}(x_1,y)=0,\ 0\leq y\leq h, \tag{26}$$

$$\overline{\mathrm{V}}(x,-y)=\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\psi}(x),\ x_0\leq x\leq x_1/2, \tag{27}$$

условиям сопряжения

$$\overline{\mathrm{V}}(x,0-)=\overline{\mathrm{V}}(x,0+)=\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x),\ x_0\leq x\leq x_1, \tag{28}$$

$$\overline{\mathrm{V}}_y(x,0-)=\overline{\mathrm{V}}_y(x,0+)=\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\nu}(x),\ x_0\leq x\leq x_1, \tag{29}$$

условиям согласования

$$\overline{\mathrm{V}}(x_0,x_0)=0,\overline{\mathrm{V}}(x_0,h)=\overline{\mathrm{V}}(x_1,h)=0, \tag{30}$$

где

$$\overline{\psi}(x)=(\psi_0(x),\psi_1(\alpha_2(x)),\psi_2(\alpha_2^2(x)))^T, \tag{31}$$

$$\overline{\varphi}(x)=(\varphi_0(x),\varphi_1(\alpha_2(x)),\varphi_2(\alpha_2^2(x)))^T\text{ -} \tag{32}$$

заданные непрерывные достаточно гладкие вектор-функции, а

$$\overline{\omega}(x) = (\omega(x), \omega(\alpha_2(x)), \omega(\alpha_2^2(x)))^T, \tag{33}$$

$$\overline{\nu}(x) = (\nu(x), \nu(\alpha_2(x)), \nu(\alpha_2^2(x)))^T - \tag{34}$$

вектор - функции подлежащие определению.

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ Т

Теорема 1. *Если* $A_r(x), B_r(x), C_r(x)\ (r=\overline{1,p}), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$, $\varphi_k(x) \in C[x_k, x_{k+1}] \cap C^2(x_k, x_{k+1})$, $\psi_k(x) \in C[x_k, \alpha_2^k(x_1/2)] \cap$ $\cap\, \mathbb{C}^2(x_k, \alpha_2^k(x_1/2))\ (k=0,1,2)$ *;* $\psi_0(x_0) = \varphi_0(x_0) = \varphi_2(x_3) = 0$, $\varphi_k(x_{k+1}) = \varphi_{k+1}(x_{k+1})\ (k=0,1)$ *,* $B_r(x_3) = C_r(x_0) = 0\ (r=\overline{1,p})$ *и* $\psi_k'(x)$ *при* $x \to x_k\ (k=0,1,2)$ *допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение задачи Т.*

Доказательство.

3.1 *Единственность решения задачи Т* для уравнения (7) в смешанной области D следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение $\overline{u}^{\pm}(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_0^{\pm}$ при условии, что однородная задача $T_{\overline{V}}$, согласно (23), имеет в области $\overline{D}_0^{\pm}$ тривиальное решение $\overline{\mathrm{V}}(x,y) \equiv 0$.

Доказательство тривиальности решения однородной задачи $T_{\overline{V}}$ основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\overline{\beta} = \int_{x_0}^{x_1} (\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x))(\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\nu}(x))dx.$$

Лемма 1. *Если* $\overline{\mathrm{V}}^+(x,y)$ *– решение уравнения (18) в области* D_0^+ *из класса* $C\ (\overline{D}_0^+) \cap$ $C^2(D_0^+)$, *обращающееся в нуль при* $x = x_0, x_1\ (0 \le y \le h)$; $y = \sigma_0(x)\ (x_0 \le x \le x_1)$, *то*

$$\overline{\beta} \le 0, \quad \overline{\beta} = -\iint_{D_0^+} [(\overline{\mathrm{V}}_x^+(x,y))^2 + (\overline{\mathrm{V}}_y^+(x,y))^2]dxdy. \tag{35}$$

Доказательство леммы аналогично [5].

Лемма 2. *Если* $\overline{\mathrm{V}}^-(x,y)$ *– решение уравнения (18) в области* D_0^- *из класса* $C\ (\overline{D}_0^-) \cap$ $C^2(D_0^-)$ *, обращающееся в нуле на характеристике* $y = -x,\ x_0 \le x \le x_1/2$, *то*

$$\overline{\beta} \ge 0. \tag{36}$$

Доказательство леммы аналогично [5], [6].

Лемма 3. *Если* $\bar{\omega}(x) \in C[x_0, x_1] \cap C^2(x_0, x_1)$; $\bar{\nu}(x) \in C^1(x_0, x_1)$, $\overline{\omega}(x_0) = \overline{\omega}(x_1) = 0$, *то существует единственное решение* $\overline{\mathrm{V}}^-(x,y) \in C(\overline{D}_0^-) \cap$ $\cap\, C^2(D_0^-)$ *задачи Коши (18), (28), (29), (30) вида*

$$\overline{\mathrm{V}}^-(x,y) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{Q}_1(x-y)\overline{\omega}(x-y) + \boldsymbol{Q}_1(x+y)\overline{\omega}(x+y)] + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \boldsymbol{Q}_1(\xi)\overline{\nu}(\xi)d\xi, \tag{37}$$

$(x,y) \in D_0^-$, где $\overline{\omega}(t), \overline{\nu}(t)$ определены в (33),(34).

Доказательство следует из формулы Даламбера [7].

Функциональное соотношение между $\overline{\omega}(x),\overline{\nu}(x)$, привнесённое из области D_0^- на линию изменения типа $I_0=\{(x,y): x_0<x<x_1, y=0\}$, найдем из (37), учитывая условие (27):

$$\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\omega}(x))=\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\nu}(x)+2\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x/2)\overline{\psi}(x/2)),\ x_0<x<x_1, \tag{38}$$

где $\overline{\psi}(t)$ определяется равенством (31). Из леммы 1 и леммы 2, на основании (35), (36), имеем $\overline{\beta}=0.$ Тогда из положительной определенности и однородности интеграла (35), класса решений и однородности условий задачи $T_{\overline{V}}$, следует

$$\overline{\mathrm{V}}^+(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{D}_0^+. \tag{39}$$

Поэтому,

$$\overline{\omega}(x)\equiv 0, \overline{\nu}(x)\equiv 0,\ x_0<x<x_1. \tag{40}$$

На основании (37), условий сопряжения (28), (29), в силу (40), имеем

$$\overline{\mathrm{V}}^-(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{D}_0^-. \tag{41}$$

Равенства (39), (41) приводят к утверждению: $\overline{\mathrm{V}}(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{D}_0.$

Единственность решения задачи $T_{\overline{V}}$ доказана.

Из (23), в силу $\overline{\mathrm{V}}(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{D}_0,$ следует тривиальность $\overline{u}^{\pm}(x,y)$ решения однородной задачи T в области $\overline{D}_0$, то есть *единственность* решения задачи T.

3.2 *Найдем решение* $\overline{\mathrm{V}}^+(x,y)$ задачи $T_{\overline{V}}$ в области D_0^+.

Лемма 4. Если $\overline{\omega}(x),\overline{\varphi}(x)\in C[x_0,x_1]\cap C^2(x_0,x_1)$, $\overline{\omega}(x_0)=\overline{\omega}(x_1)=\overline{\varphi}(x_0)=\overline{\varphi}(x_1)=0,$ *то существует единственное решение* $\overline{V}^+(x,y)\in C(\overline{D}_0^+)\cap C^2(D_0^+)$ *задачи Дирихле (18), (25), (26), (28) вида:*

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{V}}^+(x,y)=&-\{\mathbf{P}_X^{-i(y-\sigma_0(x))}-\mathbf{P}_X^{i(y-\sigma_0(x))}\}\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{P}_X^{i\sigma_0(x)(2m+1)}(\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x))+\\&+\{\mathbf{P}_X^{-iy}-\mathbf{P}_X^{iy}\}\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{P}_X^{i\sigma_0(x)(2m+1)}(\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\varphi}(x)),\ (x,y)\in D_0^+,\end{aligned} \tag{42}$$

или (в интегральной форме)

$$\begin{aligned}\overline{V}^+(x,y)=&-\frac{i}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1}(\boldsymbol{Q}_1(\xi)\overline{\omega}(\xi))N(x,y-\sigma_0(x),\xi)d\xi+\\&+\frac{i}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1}(\boldsymbol{Q}_1(\xi)\overline{\varphi}(\xi))N(x,y,\xi)d\xi,\ (x,y)\in D_0^+,\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$i=\sqrt{-1},\ N(x,y,\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\frac{\gamma_{1k}^+(x,y,\xi)\gamma_{2k}^+(x,y,\xi)}{\gamma_{1k}^-(x,y,\xi)\gamma_{2k}^-(x,y,\xi)}, \tag{44}$$

а

$$\gamma_{\rho k}^{\pm}(x,y,\xi)=\cos[\pi(\xi+(-1)^{\rho}(x\pm iy))/x_1]-ch[\pi\sigma_0(x\pm iy)\,(2k+1)/x_1]\ (\rho=1,2),$$
$$N(x,y,\xi)\in C(\overline{D}_0^+)\cap C^2(D_0^+),$$

причем $\overline{\varphi}(x)$ *имеет вид (32).*

Доказательство следует из непосредственно проверяемого общего решения

$$\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)=\overline{K}_1(x+iy)+\overline{K}_2(x-iy)=\mathbf{P}_x^{-iy}\overline{K}_1(x)+\mathbf{P}_x^{iy}\overline{K}_2(x), \tag{45}$$

($\overline{K}_1(t),\overline{K}_2(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые произвольные вектор – функции), из которого с помощью условия (28) относительно $\overline{K}_1(x)$ получим разностное уравнение

$$\overline{K}_1(x)=\mathbf{P}_x^{2iy}\overline{K}_1(x)+\mathbf{P}_x^{iy}\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)-\mathbf{P}_x^{2iy}\boldsymbol{Q}_j(x)\overline{\omega}(x),\ x_0\le x\le x_1$$

и его [8] решение

$$\overline{K}_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{2iky}(\mathbf{P}_x^{iy}\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)-\mathbf{P}_x^{2iy}\boldsymbol{Q}_j(x)\overline{\omega}(x)),\ x_0\le x\le x_1,$$

принимающее, в силу (25), окончательный вид

$$\overline{K}_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{2ik\sigma_0(x)}(\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)}\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\varphi}(x)-\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)}\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x)),\ x_0\le x\le x_1,$$

при этом

$$\overline{K}_2(x)=\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x)-\overline{K}_1(x),\ x_0\le x\le x_1.$$

Поэтому на основании (45) и последних равенств получим решение (42) задачи Дирихле (18), (25), (26), (28).

Любая [9] финитная на промежутке $[x_0,x_1]=[0,x_1]$ непрерывная функция

$$f(x)=(f(\xi),\delta(\xi-x)-\delta(\xi+x))=\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)[\delta(\xi-x)-\delta(\xi+x)]d\xi, \tag{46}$$

где дельта-функция [10] Дирака

$$\delta(z)=\frac{1}{2x_1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda_m z),\ \lambda_m=m\pi/x_1. \tag{47}$$

Поэтому, применяя к (42) выражения (46), (47), учитывая формулу 5.4.12.1 из [11], аналогично [12] получим интегральное представление решения задачи Дирихле (18), (25), (26), (28) в форме (43), (44), поскольку, например

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{iy(2k+1)}f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{iy(2k+1)}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)[\delta(\xi-x)-\delta(\xi+x)]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(e^{i\lambda_m(\xi-x)}-e^{-i\lambda_m(\xi+x)})\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda_m y(2k+1)}d\xi=$$

$$=\frac{i}{x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{m=1}^{+\infty}(\sin[\lambda_m(\xi-x)]+\sin[\lambda_m(\xi+x)])\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda_m y(2k+1)}d\xi=$$

$$=\frac{i}{x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}(\sin[\lambda_m(\xi-x)]+\sin[\lambda_m(\xi+x)])e^{-\lambda_m y(2k+1)}d\xi=$$

$$=-\frac{i}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{\sin[\pi(\xi-x)/x_1]}{\cos[\pi(\xi-x)/x_1]-ch[\pi y(2k+1)/x_1]}+$$

$$+\frac{\sin[\pi(\xi+x)/x_1]}{\cos[\pi(\xi+x)/x_1]-ch[\pi y(2k+1)/x_1]})d\xi=$$

$$=-\frac{i}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\{\cos[\pi(\xi-x)/x_1]-ch[\pi y(2k+1)/x_1)]\}\times$$

$$\times\{\cos[\pi(\xi+x)/x_1]-ch[\pi y(2k+1)/x_1]\}d\xi,$$

причем ряды, входящие в интеграл, абсолютно и равномерно сходятся в области $x_0 \le x, \xi \le x_1$, дважды непрерывно дифференцируемы в $x_0 < x, \xi < x_1$, так как, в силу того, что $|\sin[\pi(\xi \pm x)/x_1]| \le 1, |\cos[\pi(\xi + x)/x_1]| \le 1,$
$|ch[\pi y(2k+1)/x_1] - \cos[\pi(\xi \pm x)/x_1]| \ge ch[\pi y(2k+1)/x_1] - 1 = 2sh^2[\pi y(2k+1)/2x_1] \ge$
$\ge 2[\pi y(2k+1)/2x_1]^2$, мажорируются сходящимся числовым [11, формула 5.1.4.1] рядом

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Лемма доказана.

Найдем *функциональное соотношение между* $\overline{\omega}(x)$ *и* $\overline{\nu}(x)$, привнесённое из D_0^+ на линию изменения типа $I_0 = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y = 0\}$.

Условие (29) и решение (42) позволяют записать

$$\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\nu}(x) = i\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\omega}(x)) - 2i\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)k} \frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\omega}(x)) +$$
$$+ 2i\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)(2k+1)} \frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\varphi}(x)),\ x_0 < x < x_1,$$

то есть

$$(1 - \mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)})(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\nu}(x)) = -i(1 + \mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)})\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\omega}(x)) +$$
$$+ 2i\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)} \frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\varphi}(x)), x_0 < x < x_1. \tag{48}$$

Полученное выражение является искомым функциональным соотношением.

3.3. *Вопрос существования решения* задачи $T_{\overline{V}}$ в области D_0, в силу условий сопряжения (28), (29), сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (38), (48), то есть к разностному уравнению

$$(1 + i\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)})(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\nu}(x)) = -(i+1)(1 + \mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)})\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x/2)\overline{\psi}(x/2)) +$$
$$+ (i+1)\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)} \frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\varphi}(x)), x_0 < x < x_1,$$

решение которого, найденное аналогично [8], имеет вид

$$\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\nu}(x) = (i-1)\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x/2)\overline{\psi}(x/2)) - 2i\sum_{m=0}^{+\infty}(-i)^m \mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)m} \frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x/2)\overline{\psi}(x/2)) +$$
$$+ (i+1)\sum_{m=0}^{+\infty}(-i)^m \mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)(2m+1)} \frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\varphi}(x)),\ x_0 < x < x_1 \tag{49}$$

или, применяя к (49) выражения (46), (47), учитывая формулу 5.4.12.1 из [11], аналогично [12] получим интегральное представление

$$\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\nu}(x) = (i-1)\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x/2)\overline{\psi}(x/2)) - \frac{i+1}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\xi}(\boldsymbol{Q_1}(\xi/2)\overline{\psi}(\xi/2))\mathrm{W}(x + i\sigma_0(x), \xi)d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\xi}(\boldsymbol{Q_1}(\xi)\overline{\varphi}(\xi))\mathrm{W}(x, \xi)d\xi,\ x_0 < x < x_1, \tag{50}$$

где

$$\mathrm{W}(x,\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{\Delta_{11}^{+}(x,y,\xi,k)\Delta_{21}^{-}(x,y,\xi,k)}{\Delta_{22}^{+}(x,y,\xi,k)\Delta_{12}^{-}(x,y,\xi,k)}\right)\Big|_{y=0},$$

а

$$\Delta_{l\rho}^{\pm}(x,y,\xi,k)=\cos[-y+\pi(\xi\pm x)/x_1]-ch[(-1)^l y+\pi\sigma_0(x)(4k+2\rho-1)/x_1]$$

$(l,\rho=1,2)$, причем $\mathrm{W}(x,t)\in\mathbb{C}^1(x_0\le x,\xi\le x_1)\cap\mathbb{C}^2(x_0<x,\xi<x_1)$.

В силу свойств функций $\overline{\varphi}(x),\overline{\psi}(x)$, входящих в (49)(или (50)), выполняется включение $\boldsymbol{Q}_j(x)\overline{\nu}(x)\in\mathrm{C}^1(x_0,x_1)$. Из (38), на основании (50), можно найти $\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x)\in\mathrm{C}\ [x_0,x_1]\cap\mathrm{C}^2(x_0,x_1)$. Подставляя найденные значения $\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\nu}(x)$, $\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x)$ в (37), (43), получим окончательный вид решений $\overline{\mathrm{V}}^{-}(x,y)$ и $\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)$ задачи $T_{\overline{V}}$ в областях $\overline{D}_0^{-}$ и $\overline{D}_0^{+}$, то есть искомую функцию $\overline{\mathrm{V}}(x,y)$ задачи $T_{\overline{V}}$ в области $D_0=D_0^{-}\cup D_0^{+}\cup I_0$.

Единственное решение $u(x,y)$ задачи T в области D_0, представимое формулой (23), можно записать, согласно (17), (21), (24), в покомпонентной форме

$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),y)=\overline{\boldsymbol{Q}}_{1k}^{-1}(x)\overline{\mathrm{V}}(x,y),\ (x,y)\in D_0^{\pm}(k=0,1,2),$

или

$$u(x,y)=u_k^{\pm}(x,y)=\overline{\boldsymbol{Q}}_{1k}^{-1}(\alpha_1^k(x))\overline{\mathrm{V}}(\alpha_1^k(x),y),\ (x,y)\in D_k^{\pm}(k=0,1,2),$$

где $\overline{\boldsymbol{Q}}_{1k}^{-1}(x)$ - компоненты матрицы $\boldsymbol{Q}_1^{-1}(x)$ из (24).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. (1981) Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука.
2. Смирнов М.М. (1964) Некоторые краевые задачи для одного уравнения смешанного составного типа // Сиб.матем.журн., Т.5, №4, 949-954.
3. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. (2001) О существовании режима установившихся колебаний в задаче Коши для уравнения составного типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., Т.41, №4, 646-647.
4. Бицадзе А.В. (1959) Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР.
5. Смирнов М.М. (1985) Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа.
6. Зарубин А.Н. (1999) Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел: ОГУ.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. (1972) Уравнения математической физики. М.: Наука.
8. Зарубин А.Н. (2012) Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения, Т.48, №10, 1404-1411.
9. Агранович М.С. (2008) Обобщенные функции. М.: МЦНМО.
10. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. (1988) Курс математического анализа. М.: Наука.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. (1981) Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука.
12. Зарубин А.Н. (2015) Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с переменным отклонением аргумента // Дифференц. уравнения, Т.51, №10, 1315-1327.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL MIXED INTEGRAL EQUATIONS

A.N.Zarubin
Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor
matdiff@yandex.ru
Orel
Orel State University named after I.S. Turgenev

E.V.Chaplygina
Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor
lena260581@yandex.ru
Orel
Orel State University named after I.S. Turgenev

Abstract. The Tricomi problem for the functional-differential mixed-compound advanced - delayed Lavrentyev - Bitsadze equation is investigated. The theorems of uniqueness and existence of a twice continuously differentiable solution are proved.
Keywords: mixed-type equation, integral equations, difference equation, functional delay and advance.

References

1. Bitsadze A.V. (1981) Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Science.
2. Smirnov M. M. (1964) Nekotorye kraevye zadachi dlya odnogo uravneniya smeshannogo sostavnogo tipa [Some boundary value problems for one equation of mixed composite type] // Sib.mod.journal., Vol. 5, №4, 1964, 949-954.
3. Korpusov M.O., pletner Yu.D., Sveshnikov A.G. (2001) O sushchestvovanii rezhima ustanovivshihsya kolebanij v zadache Koshi dlya uravneniya sostavnogo tipa [On the existence of the regime of steady oscillations in the Cauchy problem for the composite equation] // Journal. compute.mod. and mod. Fiz., Vol. 41, №4, 646-647.
4. Bitsadze A.V. (1959) Uravneniya smeshannogo tipa [Equations of mixed type]. Moscow: an SSSR.
5. Smirnov M.M. (1985) Uravneniya smeshannogo tipa [Equations of mixed type]. Moscow: Higher school.
6. Zarubin A.N. (1999) Uravneniya smeshannogo tipa s zapazdyvayushchim argumentom [Mixed-type equations with a lagging argument]. Orel: OSU.
7. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. (1972) Uravneniya matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Science.
8. Zarubin A. N. (2012) Kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s operezhayushche-zapazdyvayushchim argumentom [Boundary value problem for a mixed type equation with a leading-lagging argument] // Differents. equations, Vol. 48, №10, 1404-1411.
9. Agranovich M.S. (2008) Obobshchennye funkcii [Generalized functions]. Moscow: mtsnmo.
10. Ter-Krikorov A.M., Shabunin M. I. (1988) Kurs matematicheskogo analiza [Course in mathematical analysis]. Moscow: Science.
11. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. (1981) Integraly i ryady [Integrals and series]. Elementary functions. Moscow: Science.
12. Zarubin A.N. (2015) Zadacha Trikomi dlya operezhayushche-zapazdyvayushchego uravneniya smeshannogo tipa s peremennym otkloneniem argumenta [The Tricomi problem for the leading-lagging equation of mixed type with variable deviation of the argument] // Differents. equations, Vol. 51, №10, 1315-1327.

УДК 531.011

О ГАМИЛЬТОНА-ДОПУСТИМЫХ УРАВНЕНИЯХ, ИХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ В МЕХАНИКЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Светлана Александровна Будочкина
к.ф.-м.н., доцент
budochkina-sa@rudn.ru
г. Москва

Российский университет дружбы народов

Аннотация. При разработке некоторых методов гамильтоновой механики непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы используются, в частности, решения обратных задач вариационного исчисления (ОЗВИ) для уравнений с непотенциальными операторами. На основе методов решения ОЗВИ для таких уравнений могут быть решены задачи о представлении уравнений движения бесконечномерных систем в виде неканонических уравнений Гамильтона. При исследовании движения систем с бесконечным числом степеней свободы также существенную роль могут играть алгебраические структуры, связанные с уравнениями движения. Целью работы является исследование уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме Гамильтона-допустимых уравнений.

Ключевые слова: Гамильтона-допустимые уравнения, первые интегралы, Ли-допустимые алгебры, алгебры Ли, скобки Пуассона, механика бесконечномерных систем.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-08-00261а).

Работа является продолжением работ [1-6]. В ней используются обозначения и терминология этих работ.

Рассматриваются симметрическая невырожденная билинейная форма

$$\Phi(\cdot,\cdot) \equiv <\cdot,\cdot>: V_1 \times V_1 \to \mathbb{R} \quad (1)$$

и уравнение

$$u_t = G_u(grad_\Phi H[u]). \quad (2)$$

Определение 1 [7]. Линейный оператор $G_u: D(G_u) \subset V_1 \to V_1$ называется гамильтоновым (относительно билинейной формы (1)), если $\forall\, h, v, g \in V_1$ выполнены условия

$$< g, G_u h >= -< h, G_u g >,$$
$$< v, G_u'(g; G_u h) > + < g, G_u'(h; G_u v) > + < h, G_u'(v; G_u g) > = 0.$$

Определение 2 [7]. Уравнение (2), где оператор G_u является гамильтоновым, называется уравнением Гамильтона.

Определение 3 [7]. Алгеброй $\mathcal{A}$ называется линейное пространство над полем $\mathcal{K}$, наделенное билинейным произведением $*$, удовлетворяющим для произвольных $a, b, c \in \mathcal{A}$ и любом $\lambda \in \mathcal{K}$ следующим условиям:

$$a * (b + c) = a * b + a * c,$$
$$(a + b) * c = a * c + b * c,$$
$$(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b).$$

Определение 4 [7]. Алгебра Ли – это алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$, для которой выполняются условия

$$a * b + b * a = 0,$$

$$a * (b * c) + b * (c * a) + c * (a * b) = 0 \ \forall a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Определение 5 [7]. Любая алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$ с произведением $*$ называется Ли-допустимой алгеброй, если алгеброй Ли является алгебра $\mathcal{A}$, которая есть линейное пространство $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$, наделенное билинейным произведением

$$[a, b] = a * b - b * a \ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Рассмотрим действительное линейное пространство $\mathcal{F}_\Phi$, элементами которого являются параметрически зависящие от t функционалы $F[t,\cdot]: U_1 \subseteq V_1 \to \mathbb{R}$, допускающие представление

$$\delta F[t, u, h] = < grad_\Phi F[t, u], h > \ \forall u \in U_1, \forall h \in D(F_u').$$

Отметим, что в дальнейшем параметрически зависящие от t функционалы $F[t, u]$ будем обозначать также $F[u]$.

В этом пространстве определим билинейную операцию $\{\cdot,\cdot\}$, которая каждой паре функционалов F_1 и F_2 ставит в соответствие функционал $\{F_1, F_2\}$, определяемый формулой

$$\{F_1, F_2\}[u] = < K_1(u), G_u K_2(u) > \ \forall u \in U_1, \quad (3)$$

где $K_i(u) = grad_\Phi F_i[u], i = 1,2$.

Формула (3) определяет скобку Пуассона.

Замечание. Если $u = (q, p), q = (q_1, q_2, \dots, q_n), p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$,

$$G_u \equiv G = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

I_n- единичная матрица, то из (3) получаем классическую скобку Пуассона, составленную из функций $\varphi(q, p, t)$ и $\psi(q, p, t)$ (см. [8])

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_i, p_i)}.$$

Линейное пространство $\mathcal{F}_\Phi$, наделенное билинейной операцией (3), образует алгебру Ли.

Определение 6 [7]. Уравнение

$$u_t = \tilde{G}_u(grad_\Phi H[u]) \quad (4)$$

называется Гамильтона-допустимым уравнением, если оператор $G_u \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$ является гамильтоновым в области $D(\tilde{G}_u)$ относительно заданной билинейной формы. В этом случае оператор $\tilde{G}_u$ называется Гамильтона-допустимым оператором.

Теорема 1. Оператор $\tilde{G}_u: D(\tilde{G}_u) \subset V_1 \to V_1$ является Гамильтона-допустимым оператором тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$\tilde{G}_u = \tilde{G}_{1u} + \tilde{G}_{2u}, \quad (5)$$

где $\tilde{G}_{1u}$ – симметрический оператор, а $\tilde{G}_{2u}$ - гамильтонов.

Доказательство. Предположим, что оператор $\tilde{G}_u$ является Гамильтона-допустимым оператором. Представим его в виде

$$\tilde{G}_u = \frac{\tilde{G}_u + \tilde{G}_u^*}{2} + \frac{\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*}{2}$$

и обозначим

$$\tilde{G}_{1u} = \frac{\tilde{G}_u + \tilde{G}_u^*}{2}, \tilde{G}_{2u} = \frac{\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*}{2}.$$

Отметим, что оператор $\tilde{G}_{1u}$ является симметрическим, а $\tilde{G}_{2u}$ – гамильтоновым (по

определению Гамильтона-допустимого оператора).
Обратно, пусть имеет место (5). Тогда

$$\tilde{G}_u^* = \tilde{G}_{1u} - \tilde{G}_{2u}$$

и оператор

$$\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^* = 2\tilde{G}_{2u}$$

является гамильтоновым.

Теорема доказана.

Пример.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} u_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \\ p_t = -\frac{\delta H}{\delta u} + s(u,p). \end{cases} \quad (6)$$

Предположим, что $\delta H / \delta p \neq 0$.

Покажем, что уравнения (6) являются Гамильтона-допустимыми уравнениями. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix},$$

где $\Theta = s/(\delta H/\delta p), I$ – тождественный оператор.

В данном случае оператор

$$\tilde{G}_{\bar{u}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & \Theta \end{pmatrix}$$

представим в виде суммы

$$\tilde{G}_{1\bar{u}} + \tilde{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

симметрического и гамильтонова операторов.

Здесь $\bar{u} = (u,p)$. Тогда по теореме 1 оператор $\tilde{G}_{\bar{u}}$ является Гамильтона-допустимым оператором.

Рассмотрим уравнение

$$N(u) \equiv u_t - \tilde{G}(grad_\Phi H[u]) = 0, u \in D(N). \quad (7)$$

По теореме 1 уравнение (7) является Гамильтона-допустимым уравнением, так как $\tilde{G} = \tilde{G}_1 + \tilde{G}_2$, где оператор

$$\tilde{G}_1 = \frac{\tilde{G} + \tilde{G}^*}{2},$$

очевидно, симметрический, а оператор

$$\tilde{G}_2 = \frac{\tilde{G} - \tilde{G}^*}{2}$$

гамильтонов, так как он кососимметрический и не зависит от u.

Предположим, что функционал $J[u]$ – первый интеграл уравнения (7), а симметрический оператор $\tilde{G}_1$ является положительно определенным относительно заданной билинейной формы Φ, то есть

$$\Phi(v, \tilde{G}_1 v) \geq k \parallel v \parallel \;\; \forall v \in D(\tilde{G}_1),$$

где k – положительная постоянная.

Будем считать, что функционалы H и J не зависят явно от t. Тогда

$$\begin{gathered} D_t(H[u]+\alpha J[u])|_{(6)} = \Phi\left(grad_\Phi H[u] + \alpha grad_\Phi J[u], \tilde{G}(grad_\Phi H[u])\right) = \\ = \Phi\left(grad_\Phi H[u], \tilde{G}(grad_\Phi H[u])\right) + \alpha\Phi\left(grad_\Phi J[u], \tilde{G}(grad_\Phi H[u])\right) = \\ = \Phi\left(grad_\Phi H[u], \tilde{G}_1(grad_\Phi H[u])\right) \geq k \parallel grad_\Phi H[u] \parallel \ \forall u \in D(N), \alpha \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{8}$$

что указывает на возможность использования функционалов H (при $\alpha = 0$) или $H + \alpha J$ в качестве функционалов Ляпунова для исследования устойчивости движения системы.

Отметим, что в (8)

$$\Phi\left(grad_\Phi J[u], \tilde{G}(grad_\Phi H[u])\right) = 0$$

по определению первого интеграла, а

$$\Phi\left(grad_\Phi H[u], \tilde{G}_2(grad_\Phi H[u])\right) = 0$$

ввиду кососимметричности оператора $\tilde{G}_2$.

Из изложенного выше естественным образом возникает задача нахождения первых интегралов Гамильтона-допустимых уравнений.

Теорема 2. Функционал $J[u]$ является первым интегралом уравнения (4) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial J[u]}{\partial t} + \{J, H\}[u] + < grad_\Phi J[u], \tilde{G}_u^*(grad_\Phi H[u]) > = 0$$

на решениях уравнения (4).

Доказательство. Необходимость. Пусть $J[u]$ является первым интегралом уравнения (4), то есть

$$\left.\frac{d}{dt}J[u]\right|_{(4)} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\left.\frac{d}{dt}J[u]\right|_{(4)} = \left.\left(\frac{\partial J[u]}{\partial t} + < grad_\Phi J[u], u_t >\right)\right|_{(4)} = \frac{\partial J[u]}{\partial t} + < grad_\Phi J[u], \tilde{G}_u(grad_\Phi H[u]) >=$$

$$= \frac{\partial J[u]}{\partial t} + < grad_\Phi J[u], (\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*)(grad_\Phi H[u]) > + < grad_\Phi J[u], \tilde{G}_u^*(grad_\Phi H[u]) > =$$

$$= \frac{\partial J[u]}{\partial t} + \{J, H\}[u] + < grad_\Phi J[u], \tilde{G}_u^*(grad_\Phi H[u]) > = 0.$$

Достаточность доказывается обратным ходом рассуждений.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если

$$\frac{\partial H[u]}{\partial t} + < grad_\Phi H[u], \tilde{G}_u^*(grad_\Phi H[u]) > = 0$$

на решениях уравнения (4), то гамильтониан H является первым интегралом этого уравнения.

Следствие 2. Функционал $J[u]$ является первым интегралом уравнения Гамильтона (2) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial J[u]}{\partial t} + \{J, H\}[u] = 0$$

на решениях уравнения (2).

Здесь

$$\{J, H\}[u] = < grad_\Phi J[u], G_u(grad_\Phi H[u]) >.$$

Следствие 3. Если гамильтониан H не зависит явно от t, то он является первым интегралом уравнения Гамильтона (2).

В пространстве $\mathcal{F}_\Phi$ введем билинейную операцию

$$(F_1, F_2)[u] =< grad_\Phi F_1[u], \tilde{G}_u grad_\Phi F_2[u] >, \quad (9)$$

где $\tilde{G}_u$ – Гамильтона-допустимый оператор.

Теорема 3. Линейное пространство $\mathcal{F}_\Phi$, наделенное билинейной операцией (9), образует Ли-допустимую алгебру.

Доказательство. Действительно, (9) позволяет ввести структуру алгебры в линейном пространстве $\mathcal{F}_\Phi$, так как условия определения 3, очевидно, выполняются.

Эта алгебра не является алгеброй Ли. Однако она является Ли-допустимой алгеброй, так как для скобки $\{\cdot,\cdot\}$, определенной формулой

$$\{F_1, F_2\}[u] = (F_1, F_2)[u] - (F_2, F_1)[u] =$$
$$=< grad_\Phi F_1[u], \big(\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*\big) grad_\Phi F_2[u] >,$$

выполняются условия определения 4, так как оператор $G_u \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$ является гамильтоновым.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Савчин В.М., Будочкина С.А. (2008) Уравнения Гамильтона для бесконечномерных систем и их уравнения в вариациях // Дифференциальные уравнения. Т. 44, №4. С. 570-573.
2. Будочкина С.А., Савчин В.М. (2011) О Bu-гамильтоновых уравнениях в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Доклады Академии наук. Т. 439, №4. С. 583-584.
3. Будочкина С.А. (2013) О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме Bu-гамильтонова уравнения // Дифференциальные уравнения. Т. 49, №2. С. 175-185.
4. Будочкина С.А., Савчин В.М. (2013) О бесконечномерных лагранжевых системах с непотенциальными силами // Доклады Академии наук. Т. 448, №5. С. 518-519.
5. Будочкина С.А., Савчин В.М. (2015) О квазипотенциальных операторах и Гамильтона-допустимых уравнениях в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук. Т. 464, №3. С. 267-269.
6. Будочкина С.А., Савчин В.М. (2016) Операторное уравнение со второй производной по времени и Гамильтона-допустимые уравнения // Доклады Академии наук. Т. 470, №1. С. 7-9.
7. Савчин В.М. (1991) Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во УДН.
8. Галиуллин А.С. (1998) Аналитическая динамика. М.: Изд-во РУДН.

ON HAMILTONIAN-ADMISSIBLE EQUATIONS, FIRST INTEGRALS AND ALGEBRAIC STRUCTURES IN THE MECHANICS OF INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEMS

S.A. Budochkina
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
budochkina-sa@rudn.ru
Moscow

Peoples' Friendship
University of Russia

Abstract. Solutions of inverse problems of the calculus of variations (IPCV) for equations with nonpotential operators are used for development of some methods of Hamiltonian mechanics for infinite-dimensional nonpotential systems. The problem of representation of such equations in the form of noncanonical Hamiltonian equations can be studied with the use of methods for solving IPCV. Algebraic structures associated with the equations of motion play an important role in the mechanics of infinite-dimensional systems. The aim of the work is to investigate the equations of motion of infinite-dimensional nonpotential systems in the form of Hamiltonian-admissible equations.

Keywords: Hamiltonian-admissible equations, first integrals, Lie-admissible algebras, Lie algebras, Poisson brackets, mechanics of infinite-dimensional systems.

References

1. Savchin V.M., Budochkina S.A. (2008) Hamilton equations for infinite-dimensional systems and their variational equations // Differential Equations. V. 44, №4. P. 593-596.
2. Budochkina S.A., Savchin V.M. (2011) On Bu-Hamiltonian equations in mechanics of infinite-dimensional systems // Doklady Mathematics. V. 84, №1. P. 525-526.
3. Budochkina S.A. (2013) On a representation of an operator equation with first time derivative in the form of a Bu-Hamiltonian equation // Differential Equations. V. 49, №2. P. 176-186.
4. Budochkina S.A., Savchin V.M. (2013) On infinite-dimensional Lagrangian systems with nonpotential forces // Doklady Mathematics. V. 87, №1. P. 110-111.
5. Budochkina S.A., Savchin V.M. (2015) On quasipotential operators and Hamiltonian-admissible equations in the mechanics of infinite-dimensional systems // Doklady Mathematics. V. 92, №2. P. 554-555.
6. Budochkina S.A., Savchin V.M. (2016) An operator equation with the second time derivative and Hamiltonian-admissible equations // Doklady Mathematics. V. 94, №2. P. 487-489.
7. Savchin V.M. (1991) Matematicheskie metody mekhaniki beskonechnomernykh nepotentsial'nykh sistem [Mathematical methods of the mechanics of infinite-dimensional nonpotential systems]. M.: UDN.
8. Galiullin A.S. (1998) Analiticheskaya dinamika [Analytical dynamics]. M.: RUDN.

УДК 517.983

О СУЩЕСТВОВАНИИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА $\varphi(A)$ НА АЛГЕБРЕ H

Татьяна Николаевна Можарова
к.ф.-м.н., доцент
tatjana.mozharova@yandex.ru
г. Орел

Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева

Аннотация. Автором рассматриваются вопросы, связанные с исследованием условий применимости и непрерывности линейных ограниченных операторов с переменными коэффициентами, действующих в полной локально выпуклой алгебре *H*.

Ключевые слова: линейный ограниченный оператор, порядок и тип оператора, целая векторнозначная функция, порядок и тип роста целой векторнозначной функции, полная локально выпуклая алгебра.

Пусть *H* – полная локально выпуклая алгебра, топология которой задается счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$, причем

$$\forall x,y\in H,\ \forall p,\ \exists p_1,\ p_2:\ \|xy\|_p \le \|x\|_{p_1} \cdot \|y\|_{p_2}\,.$$

Пусть, далее, A: $H\to H$ – линейный ограниченный оператор порядка $\beta\ne 0,\infty$ и типа $\alpha<\infty$. В этих условиях справедлива

Теорема 1

Каждая целая векторнозначная функция $\varphi(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k t^k$, $x_k\in H$, $\forall k$,

со значениями в *H*, порядок роста которой $\rho \le \dfrac{1}{\beta}$, а при $\rho = \dfrac{1}{\beta}$ тип $\sigma < \dfrac{\beta}{\alpha e}$, определяет линейный, непрерывный оператор

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x_k A^k(x), \quad (1)$$

действующий на *H* и переводящий *H* в себя.

Доказательство

Оценим общий член ряда (1):

$$\left\|x_k A^k(x)\right\|_p \le \|x_k\|_{p_1} \cdot \left\|A^k(x)\right\|_{p_2},\ \forall p,\ \exists p_1,\ p_2,\ x_k\in H,\ x\in H.$$

При этом получим, что

$$\left\|x_k A^k(x)\right\|_p < \left[\frac{(\sigma_{p_1}+\varepsilon)e(\alpha_{p_2}+\varepsilon)}{\beta}\right]^{\beta k} \cdot \|x\|_q,\ \forall\varepsilon>0,\ \forall p,\ \exists q,$$

где $\alpha_{p_2} \leq \alpha$ – p_2 - тип оператора A при порядке β, $\sigma_{p_1} \leq \sigma$ – p_1 - тип роста функции $\varphi(t)$ при порядке роста $\rho = \dfrac{1}{\beta}$.

Тогда $\dfrac{\sigma_{p_1} e \alpha_{p_2}}{\beta} \leq \dfrac{\sigma e \alpha}{\beta} < 1$, поскольку (по условию теоремы) $\sigma < \dfrac{\beta}{\alpha e}$.

Отсюда следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\dfrac{(\sigma_{p_1} + \varepsilon) e (\alpha_{p_2} + \varepsilon)}{\beta} < 1$,

а значит, $\left\| x_k A^k(x) \right\|_p < \gamma^k \|x\|_q$, $0 < \gamma < 1$; $\forall p$.

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно по топологии пространства H и справедлива оценка:

$$\left\| \varphi(A)(x) \right\|_p \leq C_p \|x\|_q, \ \forall p, \ \forall x \in H, \ C_p > 0, \ \exists q.$$

Теорема доказана.

Отметим, что справедливость теоремы 1 для случая скалярной характеристической функции доказана ранее Громовым В.П. ([1]).

Довольно часто на практике встречаются случаи, когда тип оператора A равен бесконечности. Теорема 1 этот случай не включает. При $\alpha = \infty$ справедлива

<u>Теорема 2</u>

Пусть H – полная локально-выпуклая алгебра с заданной на ней счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$, и A: $H \to H$ – линейный непрерывный оператор порядка $\beta \neq 0, \infty$ и типа $\alpha = \infty$, причем $\alpha_p < \infty$, $\forall p$. Тогда каждая целая векторнозначная функция $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$, $x_k \in H$, - со значениями в H, порядок роста которой $\rho \leq \dfrac{1}{\beta}$, а при порядке $\rho = \dfrac{1}{\beta}$ тип $\sigma = 0$, определяет линейный непрерывный оператор $\varphi(A)$: $H \to H$.

<u>Доказательство</u>

Имеем: $\forall p$, $\forall x \in H \exists p_1, p_2$:

$$\left\| x_k A^k(x) \right\|_p \leq \|x_k\|_{p_1} \cdot \left\| A^k(x) \right\|_{p_2}, \ x_k \in H.$$

Из условия $\overline{\lim_{k \to \infty}} k^{\beta} \sqrt[k]{\|x_k\|_q} = 0$, $\forall$q, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \|x_k\|_{p_1} < \left[\frac{\varepsilon}{k^{\beta}} \right]^k, \ \forall k > k_0(\varepsilon). \ (2)$$

По определению p-типа оператора A: $\forall p_2, \forall\varepsilon > 0$, $\exists q$, такое, что

$$\left\|A^k(x)\right\|_{p_2} < \left[(\alpha_{p_2} + \varepsilon)k\right]^{\beta k}\|x\|_q, \ \forall k > k_1(p_2, \varepsilon), \ \forall x \in H. \quad (3)$$

Используя оценки (2) и (3), находим, что при фиксированных $\alpha_{p_2} < \infty$ и β и достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\left(\alpha_{p_2} + \varepsilon\right)^{\beta} \cdot \varepsilon < 1.$$

Это означает, что ряд (1) сходится по топологии пространства H и

$$\|\varphi(A)(x)\|_p < C_p\|x\|_q, \forall x \in H, \ \forall p.$$

Терема доказана.

Рассмотрим простейшие примеры, иллюстрирующие теоремы 1 и 2.

1) Рассмотрим действующий в пространстве $H(\boldsymbol{C})$ оператор $A = \dfrac{d}{dz}$. Известно, что $\beta = 1$, $\alpha = 0$.

Пусть

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)t^k, \ c_k(z) \in H(\boldsymbol{C}). \quad (4)$$

Тогда, как следствие теоремы 1, получаем:

<u>Предложение 1</u>

Пусть целая вектор-функция $\varphi(t)$: $\boldsymbol{C} \to H(\boldsymbol{C})$ имеет порядок роста $\rho \leq 1$, а при порядке $\rho = 1$ тип $\sigma < \infty$. Тогда она порождает линейный непрерывный оператор $\varphi\left(\dfrac{d}{dz}\right)(F) \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)F^{(k)}(z)$, $c_k(z) \in H(\boldsymbol{C})$, действующий на $H(\boldsymbol{C})$ и переводящий $H(\boldsymbol{C})$ в себя.

2) Пусть $H = H(G)$ – пространство функций, аналитических в односвязной области G, $G \neq \boldsymbol{C}$, топология которого задается бесконечной системой норм

$$\|F\|_p = \max_{z \in G_p}|F(z)| \ G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G; \ \bigcup_{p \geq 1} G_p = G; \ F \in H(G).$$

В этом случае для оператора $A = \dfrac{d}{dz}$ $\beta = 1$, $\alpha = \infty$.

Пусть $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)t^k$, $c_k(z) \in H(G)$. В этом случае в качестве следствия теоремы 2 получаем

<u>Предложение 2</u>

Пусть целая вектор-функция $\varphi(t)$: $\mathbf{C}\to H(G)$ имеет порядок роста $\rho\le 1$, а при порядке $\rho = 1$ тип $\sigma = 0$. Тогда она порождает линейный непрерывный оператор $\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)(F)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)F^{(k)}(z)$, $c_k(z)\in H(G)$, определенный на $H(G)$ и переводящий $H(G)$ в себя.

3) Пусть $H = H_R$ – пространство функций, аналитических в круге $|z| <R<\infty$;

$\|F\|_p=\max_{|z|\le p<R}|F(z)|$, $F\in H_R$. $A = D_{f_1}$ – оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева ([2]), порожденный целой скалярной функцией $f_1(z)$, порядок роста которой $\rho> 0$ и тип $\sigma> 0$. Как известно ([3]), порядок и тип оператора D_{f_1} в H_R: $\beta=\frac{1}{\rho}$, $\alpha = \infty$.

Пусть $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)t^k$, $c_k(z)\in H_R$.

Из теоремы 2 следует

Предложение 3

Пусть целая вектор-функция $\varphi(t)$: $\mathbf{C}\to H_R$ имеет порядок роста не выше ρ, а при порядке ρ – минимальный тип. Тогда она порождает линейный непрерывный оператор $\varphi(D_{f_1})(F)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)D_{f_1}^k(F)$, $c_k(z)\in H_R$, определенный на пространстве H_R и переводящий H_R в себя.

4) Рассмотрим оператор $A = D_{f_1}$ действующий в пространстве $H(\mathbf{C})$. В этом случае $\beta=\frac{1}{\rho}$, $\alpha = 0$ ($\rho> 0$ – порядок роста порождающей оператор D_{f_1} целой скалярной функции $f_1(z)$).

Пусть $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)t^k$, $c_k(z)\in H(\mathbf{C})$.

Из теоремы 1 следует

Предложение 4

Пусть целая вектор-функция $\varphi(t)$: $\mathbf{C}\to H(\mathbf{C})$ имеет порядок роста не выше ρ, а при порядке ρ – тип $\sigma<\infty$. Тогда она порождает линейный непрерывный оператор $\varphi(D_{f_1})(F)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)D_{f_1}^k(F)$,определенный на $H(\mathbf{C})$ и переводящий это пространство в себя.

Для случая скалярной характеристической функции утверждения, указанные выше в предложениях 1-4, доказаны ранее другим методом в работах А.Ф. Леонтьева ([2]).

Список литературы

1. Громов В.П. (1988) О разложении векторов локально-выпуклого пространства в ряд // В сб. «Комплексный анализ и его приложения». Деп. в ВИНИТИ, №3728-В88, с.3-27.
2. Леонтьев А.Ф. (1981) Обобщения рядов экспонент. М.: Наука.
3. Можарова Т.Н. (2015) Операторы бесконечного порядка с переменными коэффициентами, построенные по обобщенным производным Гельфонда – Леонтьева// В сборнике: Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета. Орел, с.85-92.

THE EXISTENCE AND CONTINUITY OF THE OPERATOR φ(A) ON THE ALGEBRA*H*

T. N. Mozharova
K. F.-M. N., associate Professor
tatjana.mozharova@yandex.ru
Orel

Orel state University named after I. S. Turgenev

Abstract. The author considers the issues related to the study of the conditions of applicability and continuity of linear bounded operators with variable coefficients acting in the full locally convex algebra *H*.

Keywords:a linear bounded operator, the order and type of the operator to a vector-valued function, order and type of growth of a vector-valued function, a complete locally convex algebra.

References

1. Gromov V. P. (1988) On the decomposition of vectors of locally convex space in a series // In SB. "Complex analysis and its applications". DEP. in VINITI, No. 3728-88, pp. 3-27.
2. Leontiev A. F. (1981) Generalizations of series of exponents. M.: Science.
3. Mozharova T. N. (2015) Operators of infinite order with variable coefficients constructed from generalized Gelfond – Leontiev derivatives // In the collection: Selected works of the faculty of physics and mathematics of the Orel state University. Orel, pp. 85-92.

УДК 517

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Ирина Адольфовна Елецких
к.ф.-м.н., доцент
yeletskikh.irina@yandex.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В работе изучаются общие вопросы теории устойчивости по Ляпунову: даны определения устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости точки равновесия, приведены основные положения метода Ляпунова для случая автономных систем. В статье приводятся задачи на исследование качественного поведения динамической системы в точках равновесия с помощью применения первого метода Ляпунова. Использование компьютерных технологий позволяет расширить приложения известных теорем Ляпунова. В частности, получить наглядное представление поведения системы в окрестности точки равновесия, сформулировать обратные теоремы, которые позволяют расширить класс различных процессов и явлений при их математическом моделировании. На примере модели математического маятника исследование на устойчивость и асимптотическую устойчивость точек равновесия проводится с использованием фазовых портретов, с использованием энергетических концепций, с использованием определённым образом заданных функций (функций Ляпунова). Этот пример выявляет важную особенность теоремы устойчивости Ляпунова: эта теорема дает лишь достаточные условия устойчивости. Однако, не выполнение для выбранной функции Ляпунова условий устойчивости или асимптотической устойчивости не означает, что начало координат не является устойчивой или асимптотически устойчивой точкой равновесия системы. Данное положение подтверждается принципом инвариантности Ла-Салля, в котором обобщается теорема Ляпунова за счет ослабления требования относительно отрицательной определенности производной функции Ляпунова, показывается возможность использования в случаях, когда система имеет не только одну изолированную точку равновесия, но и целое множество устойчивых состояний, устанавливается, что функция Ляпунова не обязательно должна быть положительно определенной и её построение не связано с построением положительно инвариантного множества. Предложенное Ла-Саллем обобщение основной теории Ляпунова, рассматривается в случае линейной стационарной системы.

Ключевые слова: устойчивость, неустойчивость, асимптотическая устойчивость автономная система, линейная стационарная система, принцип инвариантности.

В развитии теории дифференциальных уравнений ясно прослеживаются два противоположных направления: исследования, в процессе которых получается решение либо в конечной (замкнутой) форме, либо в результате некоторого приближённого процесса. Исследования в первом направлении возможны в редких случаях. Целью исследований, относящихся ко второму направлению, является получение информации о свойствах всего множества решений, причем не важно будут ли эти решения точными или приблизительными. Именно таким образом ещё в 1880 году были сформулированы задачи качественной теории дифференциальных уравнений французским математиком и механиком А. Пуанкаре. Главной задачей качественной теории является изучение поведения решений, близких к некоторому заданному решению. Это решение изображается кривой или траекторией в некотором пространстве. Вставший впоследствии вопрос о расположении других траекторий вблизи заданного решения привел к необходимости создания теории устойчивости.

Отправной точкой всех исследований в этом направлении служит классическая работа А.М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», появившаяся в России в 1892 году. В своей работе русский математик и инженер А.М. Ляпунов изучает вопросы устойчивости с помощью двух различных методов. Для использования так называемого первого метода Ляпунова необходимо предположить, что исследуемое решение известно; этот метод применим лишь к ограниченному классу важных случаев. Напротив, второй, или прямой метод Ляпунова является чрезвычайно общим и мощным, и, самое главное, для применения этого метода не нужно знать самих решений — в этом его неоценимое преимущество.

Центральным вопросом теории Ляпунова является устойчивость точек равновесия. В соответствии с этой теорией точка равновесия устойчива, если все решения, начинающиеся вблизи этой точки, остаются в ее окрестности; в противном случае эта точка неустойчива. Точка равновесия асимптотически устойчива, если все решения, начинающиеся в близких к ней точках, не только остаются вблизи нее, но и стремятся к этой точке равновесия при стремлении времени к бесконечности [1, с.114]. Теоремы устойчивости Ляпунова позволяют получить достаточные условия для устойчивости, асимптотической устойчивости и других типов устойчивости. Однако они не дают необходимых критериев устойчивости. Существуют теоремы, в которых утверждается, что условия многих теорем Ляпунова являются также и необходимыми условиями. Подобные теоремы обычно называют обратными теоремами Ляпунова. Методы анализа, используемые в теории устойчивости Ляпунова, могут применяться для доказательства факта ограниченности решения даже в случаях, когда рассматриваемая система не имеет точек равновесия, и обобщаться на более сложные случаи моделирования различных процессов. На основании изложенного выше следует актуальность заявленной темы.

Целью данного исследования является изучение обобщений основных теорем Ляпунова для случая автономных систем, предложенных американскими учеными Ж. Ла-Саллем и С. Лефшецем [2, с. 130-155].

Поставим задачу показать, что обобщенные теоремы Ляпунова распространяются на более широкий класс дифференциальных уравнений и их систем, и имеют широкое применение для использования в задачах на анализ устойчивости различных процессов и явлений при их математическом моделировании.

Приведем основные положения теории, которые будем использовать в дальнейших рассуждениях. Автономная система дифференциальных уравнений (динамическая) – частный случай системы дифференциальных уравнений, когда аргумент t системы не входит явным образом в функции, задающие систему.

Общий вид автономной системы в векторной записи:

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n, (1)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $f: D \to R^n$ – локально липшицевое отображение области $D \subset R^n$ в R^n. Предположим, что $\bar{x} \in D$ – точка равновесия системы (1), т.е. $f(\bar{x}) = 0$. Исследуем свойства устойчивости этой точки в случае, когда $\bar{x} = 0$.

Напомним, что точка равновесия x = 0 системы (1) называется
– устойчивой, если $(\forall\varepsilon > 0)(\forall t \geq 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)$: $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$;
– асимптотически устойчивой, если константа δ может быть выбрана таким образом, что $||x(0)|| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ [1, с.115].

Исследование на устойчивость и асимптотическую устойчивость точек равновесия можно проводить с использованием фазовых портретов, с использованием энергетических концепций, с использованием определённым образом заданных функций (функций Ляпунова).

Пример 1. В качестве примера рассмотрим математическую модель маятника, задаваемую системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_1 - bx_2. \end{cases} \quad (2)$$

Используем уже построенные в [3, с.434 – 436] фазовые портреты решений системы (2).

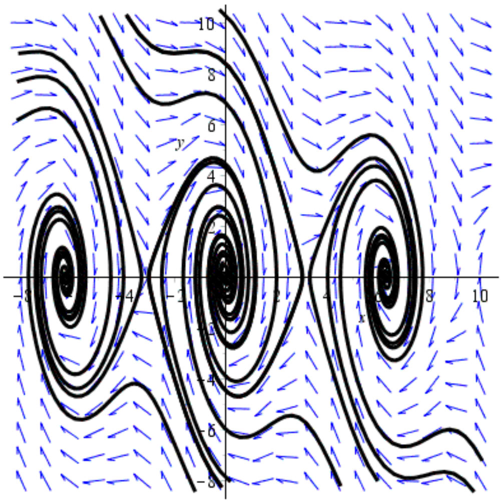


Рис.1

На рис.1 фазовый портрет построен с учетом силы трения. Он демонстрирует периодичность по x_1 с периодом 2π.Следовательно, все характерные особенности качественного поведения рассматриваемой системы могут быть представлены на вертикальной полосе $-\pi \leq x_1 \leq \pi$. Точки равновесия (0; 0), (2π; 0), (- 2π; 0) и т.д. соответствуют нижней точке равновесия маятника (0; 0). Траектории в окрестности этой точки равновесия демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности устойчивого фокуса. С другой стороны, точки равновесия (π; 0) и (- π; 0) и т.д. соответствуют верхней точке равновесия маятника (0; 0). Траектории в окрестности этой точки равновесия демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности седловой точки. Устойчивые траектории седловых точек (π; 0) и (- π; 0) образуют сепаратрисы, которые отделяют области, характеризующиеся тем, что все траектории, начинающиеся внутри этих областей, стремятся к точке равновесия (0; 0). Эта картина периодически повторяется. Тот факт, что траектории могут стремиться к различным точкам равновесия, объясняется тем, что маятник может совершить несколько полных оборотов, прежде чем он установится в нижнем положении равновесия.

Подход, который использовался при анализе примера маятника, связан с исследованием фазовых портретов уравнений его динамики. Попытки обобщить этот подход на случай системы общего вида (1) связаны с большими трудностями и во многих случаях будут безуспешны. Однако заключения, которые были сделаны выше в отношении устойчивой точки равновесия маятника, могут быть получены с использованием энергетических концепций.

Обозначим энергию маятника, представляющую собой сумму кинетической и потенциальной энергий, через $E(x)$ и предположим, что потенциальная энергия определена таким образом, что $E(0) = 0$. Тогда

$$E(x) = \int_0^{x_1} a \sin y \, dy + \frac{1}{2} x_2^2 = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2 .$$

При отсутствии трения ($b = 0$) система консервативна. Поэтому при движении системы $E = \text{const}$ или, другими словами, вдоль решений системы $dE/dt = 0$. Поскольку при $E(x) = c$, где c – малая величина, вокруг $x = 0$ образуется замкнутый контур, т.е. $x = 0$ является устойчивой точкой равновесия, что соответствует фазовому портрету (рис.2).

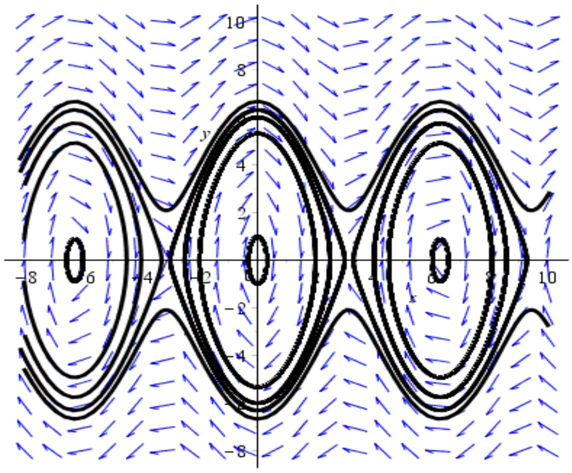


Рис. 2

В случае, когда в системе имеет место трение ($b > 0$) во время её движения энергия рассеивается, т.е. вдоль решений системы $dE/dt \leq 0$. Вследствие наличия трения энергия E может при движении системы оставаться постоянной неопределенно долгое время, и поэтому она продолжает уменьшаться до тех пор, пока не достигнет нулевого значения, что соответствует стремлению траектории к точке $x = 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, анализ производной функции E вдоль траекторий системы позволяет исследовать свойства устойчивости точки равновесия.

В 1892 году Ляпунов показал, что для установления свойств устойчивости состояния равновесия вместо функции энергии могут использоваться некоторые другие функции. Пусть $V: D \to R$ – непрерывно дифференцируемая функция, определённая в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат. Производная V вдоль траекторий системы (1), обозначаемая $\dot{V}(x)$, имеет следующий вид:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x).$$

Производная V вдоль траекторий системы зависит от уравнений этой системы. Следовательно, представление $\dot{V}(x)$ будет различно для различных систем. Теорема Ляпунова может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $x = 0$ – точка равновесия автономной системы $\dot{x} = f(x)$ и $D \subset R^n$ – открытая область, содержащая $x = 0$. Пусть $V: D \to R$ – непрерывно дифференцируемая функция, такая что*

$$V(0) = 0 \text{ и } V(x) > 0 \text{ в } D\backslash\{0\}, \quad (3)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ в } D. \quad (4)$$

Тогда $x = 0$ устойчива. Более того, если $\dot{V}(x) < 0$ в $D\backslash\{0\}$, то $x = 0$ асимптотически устойчива [1, с. 118].

В дальнейшем будем рассматривать только приведенную в статье теорему и на её основе проводить исследование систем дифференциальных уравнений. Введем ряд определений:

- Непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям (3) и (4) называется функцией Ляпунова.
- Поверхность $V(x) = c$ называется поверхностью Ляпунова или поверхностью уровня.
- Функция $V(x)$, удовлетворяющая условию (3) при $x \neq 0$, называется положительно определенной.
- Если функция $V(x)$ удовлетворяет более слабому условию $V(x) \geq 0$ при $x \neq 0$, она называется положительно полуопределенной.
- Функция $V(x)$ называется отрицательно определённой или отрицательно полуопределённой, если $-V(x)$ является соответственно положительно определённой или положительно полуопределённой.
- Если $V(x)$ не имеет определённого знака в смысле приведённых выше определений, она называется знаконеопределённой.

С учетом введённых терминов можно переформулировать теорему Ляпунова: *начало координат устойчиво (асимптотически устойчиво), если существует непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция $V(x)$, такая что $\dot{V}(x)$ отрицательно полуопределена (отрицательно определена).*

Пример 2. Рассмотрим уравнение маятника без трения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 \end{cases}$$

и исследуем точки равновесия в начале координат. В качестве функции Ляпунова выберем функцию энергии:

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Очевидно, что $V(0) = 0$ и $V(x)$ положительно определена в области $-2\pi < x_1 < 2\pi$. Производная $V(x)$ вдоль траекторий системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 = 0.$$

Таким образом, условия (3) и (4) теоремы выполнены, и можно сделать заключение, что начало координат устойчиво. Поскольку $\dot{V}(x) \equiv 0$ можно сказать, что начало координат асимптотически устойчиво. Траектории, начинающиеся на поверхности Ляпунова $V(x) = c$, остаются на этой поверхности при всех будущих моментах времени.

Пример 3. Рассмотрим уравнение маятника с учетом трения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2. \end{cases}$$

Рассмотрим в качестве функции Ляпунова ту же функцию $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$. Тогда

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = -bx_2.$$

Производная $\dot{V}(x)$ – отрицательно полуопределённая функция. Она не является отрицательно определённой, т.к. $\dot{V}(x) = 0$ при $x_2 = 0$ вне зависимости от значения x_1, т.е. $\dot{V}(x) = 0$ вдоль x_1-оси. Таким образом можно сделать заключение, что начало координат устойчиво. Однако при анализе фазового портрета при $b > 0$ можно заметить, что начало координат асимптотически устойчиво. Функция энергии не удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, поскольку её производная $\dot{V}(x) = -bx_2^2$ отрицательно полуопределена. Заметим, что $\dot{V}(x)$ отрицательна везде, за исключением линии $x_2 = 0$, где $\dot{V}(x) = 0$. Для того чтобы для траектории рассматриваемой системы было выполнено $\dot{V}(x) = 0$, необходимо, чтобы эта траектория располагалась целиком на линии $x_2 = 0$. Это можно обеспечить только в точке начала координат, т.к. из уравнений системы видно:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow \sin x_1(t) \equiv 0.$$

Следовательно, на промежутке $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ линии $x_2 = 0$ условие $\dot{V}(x) = 0$ вдоль траекторий системы может быть выполнено лишь в начале координат. Таким образом, вдоль этих траекторий функция $V\big(x(t)\big)$ должна убывать к 0 и, следовательно, $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Этот результат соотносится с тем, что при наличии трения энергия находящейся в движении системы не может оставаться постоянной.

Этот пример выявляет важную особенность теоремы устойчивости Ляпунова: эта теорема дает лишь достаточные условия устойчивости. Не выполнение для выбранной функции Ляпунова условий устойчивости или асимптотической устойчивости не означает, что начало координат не является устойчивой или асимптотически устойчивой точкой равновесия системы. Приведённое выше рассуждение указывает так же на то, что если в области вблизи начала координат определена функция Ляпунова, чья производная вдоль траекторий системы отрицательно полуопределена, и если установлено, что ни одна из траекторий не может оставаться в точках, где $\dot{V}(x) = 0$, за исключением начала координат, то начало координат асимптотически устойчиво. Эта идея следует из принципа инвариантности Ла-Салля [1, с.133].

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset D$ *– компактное множество, которое является положительно инвариантным множеством для системы* (1). *Пусть* $V: D \to R$ *– непрерывно дифференцируемая функция, такая что* $\dot{V}(x) \leq 0$ *в* Ω. *Предположим, что* E *– множество всех точек из* Ω, *в которых* $\dot{V}(x) = 0$, *и* M *– наибольшее инвариантное множество, содержащееся в* E. *Тогда каждое решение, начинающееся в* Ω, *стремится к* M *при* $t \to \infty$.

Пример 4. Рассмотрим систему первого порядка $\dot{y} = ay + u$ и адаптивный закон управления $u = -ky$, $\dot{k} = \gamma y^2, \gamma > 0$.

Полагая $x_1 = y$ и $x_2 = k$, получаем замкнутую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_2 - a)x_1, \\ \dot{x}_2 = \gamma x_1^2. \end{cases}$$

Ось ординат $x_1 = 0$ представляет собой множество состояний равновесия. Покажем, что траектории стремятся к этому множеству при $t \to \infty$, т.е. адаптивный регулятор обеспечивает стремление выхода системы y к нулю. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2,$$

где $b > a$. Производная V вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 = (-x_1^2)(x_2 - a) + x_1^2(x_2 - b) = -x_1^2(b - a) \leq 0.$$

Таким образом, $\dot{V}(x) \leq 0$. Поскольку $V(x)$ радиально неограниченна, множество $\Omega_c = \{x \in R^2 / V(x) \leq \mathrm{c}\}$ компактно и является положительно инвариантным. Полагая $\Omega = \Omega_c$, получаем, что все условия теоремы 2 (Ла-Салля) выполнены. Множество E задастся отношением $\mathrm{E} = \{x \in \Omega_c \,/\, x_1 = 0\}$. Поскольку каждая точка на оси ординат $x_1 = 0$ является точкой равновесия, E является инвариантным множеством. Поэтому в рассматриваемом примере $M = E$. Из теоремы 2 следует, что любая траектория, начинающаяся в Ω_c стремится к E при $t \to \infty$, т.е. $x_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Более того, поскольку $V(x)$ радиально неограниченна, полученное утверждение выполнено глобально, т.е. оно справедливо для всех начальных условий $x(0)$, потому что для любого $x(0)$ константа c может быть выбрана настолько большой, что $x(0) \in \Omega_c$.

Как видим, Ла-Салль обобщил теорему Ляпунова ослабив требования относительно отрицательной определенности производной функции Ляпунова, показал возможность использования в случаях, когда система имеет не только одну изолированную точку равновесия, но и целое множество устойчивых состояний, установил, что функция Ляпунова $V(x)$ не обязательно должна быть положительно определенной и её построение не связано с построением множества Ω.

В случае линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax(t)$ устойчивость точки равновесия $x = 0$ может быть полностью охарактеризована на основании информации о местоположении собственных чисел матрицы A. Этот метод анализа рассмотрен в работе [4], в которой также исследуется вопрос, о том, когда и как может быть установлен факт устойчивости точки равновесия с использованием линеаризации системы в окрестности этой точки.

Список литературы

1. Халил Х.К. (2009) Нелинейные системы. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований.

2. Ла-Салль Ж., Лефшец С. (1964) Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: МИР.

3. Мелякова О.Ю. (2016) Исследование устойчивости нелинейных систем на примере уравнения маятника // Международный студенческий научный вестник, вестник №3 (часть3) М.: ИД «Академия естествознания».

4. Барбашин Е.А. (2013) Введение в теорию устойчивости. М.: Наука.

APPLICATION OF THE METHOD OF LYAPUNOV TO INVESTIGATE ON THE STABILITY OF LINEAR STATIONARY SYSTEMS

I.A. Yeletskikh
Cand. Sci. (Phys. –Math.), associate professor
yeletskikh.irina@yandex.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The paper investigates the general questions of the theory of stability according to Lyapunov: the definitions of stability, instability and asymptotic stability, equilibrium points are given, the main provisions are determined for conditions of autonomous systems. The article presents the problems on the investigation of the qualitative behavior of a dynamic system at equilibrium points using the first Lyapunov method. The use of computer technology allows the application of well-known Lyapunov theorems to be expanded. In particular, to obtain a visual representation of the behavior of the system in the vicinity of the equilibrium point, to formulate converse theorems that allow one to expand the class of various processes and phenomena in their mathematical modeling. Using the model of the mathematical pendulum as an example, the investigation of stability and asymptotic stability of equilibrium points is carried out using phase portraits, using energy concepts, using certain functions (Lyapunov functions) given in a certain way. This example reveals an important feature of the Lyapunov stability theorem: this theorem gives only sufficient stability conditions. However, not fulfilling the conditions of stability or asymptotic stability for the chosen Lyapunov function does not mean that the origin of coordinates is not a stable or asymptotically stable equilibrium point of the system. This statement is confirmed by the LaSalle invariance principle, which generalizes the Lyapunov theorem by weakening the requirement for negative definiteness of the derivative of the Lyapunov function, shows the possibility of using in cases when the system has not only one isolated equilibrium point, but also a whole set of stable states; that the Lyapunov function does not necessarily have to be positive definite and its construction is not connected with the construction of a positively invariant set. The proposed by LaSalle generalization of the main Lyapunov theory is considered in the case of a linear stationary system.

Keywords: stability, instability, asymptotic stability autonomous system, linear stationary system, invariance principle.

References

1. Khalil Kh.K. (2009) Nelineynyye sistemy. M.–Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy.
2. La-Sall Zh., Lefshets S. (1964) Issledovaniye ustoychivosti pryamym metodom Lyapunova. M.: MIR.
3. Melyakova O.Yu. (2016) Issledovaniye ustoychivosti nelineynykh sistem na primere uravneniya mayatnika //Mezhdunarodnyy studencheskiy nauchnyy vestnik №3 (chast 3) M.: ID «Akademiya estestvoznaniya».
4. Barbashin E.A. (2013) Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti. M.: Nauka.

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

ТЕХНОЛОГИЯ АДАПТАЦИИ СЛОЖНОГО ЗНАНИЯ К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ

Евгений Иванович Смирнов
д.п.н., профессор
smiei@mail.ru
Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Елена Александровна Зубова
к.п.н., доцент
eazubova@rambler.ru
Тюмень

Тюменский нефтегазовый университет

Аннотация. В настоящей статье исследуются процессы модернизации математического образования в школе и вузе с проявлением синергетических эффектов на основе выявления и исследования «проблемных зон» освоения сложного знания средствами информационного, компьютерного и математического моделирования. Исследование касается задач освоения обучающимися сложных математических понятий и процедур в контексте реализации дидактических и компьютерных моделей уровневой и поэтапной самоорганизации когнитивных процессов и наглядного моделирования объектов и процедур. При этом реализуются процессы выявления сущности базовых учебных элементов (площадь поверхности, функциональные зависимости, итерационные процессы, численные и асимптотические методы, геометрические преобразования и фигуры и т.п.) на основе наглядного моделирования. Базовым фактором проявления синергетических эффектов является актуализация современных достижений в науке (фрактальная геометрия, теория кодирования, нечеткие множества и fuzzy-logic, теория распределений Л.Шварца, нелинейная динамика и т.п.) и реализация содержания и структуры адаптации важнейших обобщенных конструкций к наличному состоянию школьных и вузовских математических знаний и компетенций, касающихся анализа и существа возникающей и ассоциированной «проблемной зоны» школьной или вузовской математики. Показана эффективность процессов управления математическим образованием с синергетическим эффектом для развития интеллектуальных операций мышления и повышения качества освоения студентами математических конструктов и процедур в ходе профессиональной предметной подготовки в условиях неопределенности, вариативности и самоорганизации когнитивных процессов.

Ключевые слова: синергия, адаптация сложного знания, спирали фундирования, математическое моделирование, компьютерный дизайн.

Введение. Математическое образование в России и во всем мире претерпевает в последние десятилетия существенные изменения, если не сказать кризисные явления как объективного, так и субъективного характера. Цифровизация школы и вуза объявлена главным трендом российского образования и призвана дать ответы на «взрывное» появление новых компетенций, изменение рынка труда и открытости глобального информационного пространства. В то же время, интеллектуальные операции мышления (понимание, конкретизация, абстрагирование, обобщение, моделирование, аналогия, ассоциации и т.п.), лежащие в основе формирования универсальных учебных действий обучаемых, по разным объективным и субъективным причинам перестали эффективно развиваться в школьном образовании. Это создает прецедент расширения и углубления опыта личности на основе текущего его состояния, формирования и развития мотивационной сферы учения, интеллектуальных операций и способностей с опорой на фундирующие механизмы и наглядное моделирование возможностей проявления и коррекции функциональных, операциональных и инструментальных компетенций в освоении сложных конструктов и процедур математики. Эффективные образовательные системы характеризуются способностью обеспечить в полной мере потребности каждого обучающегося в самообразовании и самоактуализации при освоении сложных знаниевых конструктов и задают ценностный императив личностного развития. В связи с этим, согласно современным требованиям, они представляют собой открытые, динамично развивающиеся, нелинейные системы и должны включать механизм самоадаптации с эффектом скачкообразного перехода на более высокие уровни реализации образовательного процесса. Развитие образовательных технологий основано на слиянии ведущих педагогических парадигм и применении последних достижений в науке. Реализация процесса повышения качества математического образования в школе и вузе возможна на основе актуализации синергетических принципов и подходов в контексте адаптации современных достижений в науке к школьной и вузовской математике. Постиндустриальное общество требует специалистов с высоким уровнем потенциала развития и саморазвития интеллектуальных способностей, духовно-нравственных, аналитических и профессионально-технологических качеств, умеющих самостоятельно оценивать ситуацию и оперативно принимать обоснованные решения в сложных экономических и производственных условиях. Поэтому диалог информационной, гуманитарной, математической и естественнонаучной культур в образовательном пространстве актуализации современных научных знаний активизирует механизмы синергии и является фактором самоорганизации и связующим звеном при образовании целостных структур в обучении математике в школе и вузе. Эта интегративная основа способствует взаимодействию, взаимовлиянию, взаимообогащению областей знания в системной деятельности. Диалог культур в образовательном пространстве современной научной картины мира формирует у обучающихся целостное представление о природе, обществе, человеке, является фактором развития постнеклассических ценностей, междисциплинарного системного знания. Синергия математического образования в контексте диалога культур и адаптации современных достижений в науке в "режиме обострения" С.П. Курдюмова, будь то инклюзивное (включенное) образование, дистанционное обучение или интегрированные курсы, позволяет создать условия для повышения качества математического образования, учебной и профессиональной мотивации обучающихся с раскрытием их индивидуальных особенностей ("..разворачивая себя к культуре и истории.." Г.Гегель). А также наиболее полно выявлять и использовать коммуникативные возможности, актуализировать проявления творческой самостоятельности в образовательном процессе, формировать и развивать общекультурные и профессиональные компетенции обучающихся. Тем самым становится достижимым более глубокое и полифункциональное освоение учебных предметов, обогащенных новым качественным содержанием, характеристиками и формами, а также индивидуализация форм и средств педагогической поддержки. Обучение математике в школе и вузе должно происходить в информационно - насыщенной образовательной среде освоения сложного уровневого знания в условиях диалога математической, информационной гуманитарной и естественнонаучной культур и интеграции дидактических усилий педагога и ученика в направлении вскрытия сущностей базовых учебных элементов (понятий, теорем, процедур, алгоритмов, идей), выстраивания иерархий сложного знания, методов и средств в когнитивной деятельности, опоры на дидактические правила и закономерности освоения математической деятельности на основе синергетического подхода (фрактальная геометрия, нечеткие множества и fuzzy-logic, теория катастроф, устойчивость динамических систем и нелинейная динамика, теория кодирования и шифрования информации и т.п.). В исследовании [1] был комплексно реализован и обоснован основной тезис инновации синергетического подхода - от исследования современных достижений в науке к повышению качества школьного и вузовского математического образования. Эффективным конструктом оказалось развертывание следующих этапов проявления синергии в математическом образовании в школе и вузе: мотивационный (самоактуализация («мне это интересно»)); ориентировочно-информационной насыщенности (самоопределение ("что я могу сделать")); процессуально-деятельностный (самоорганизация («я способен управлять процессом»)); контрольно-коррекционный (оценка эмпирической верификации результатов); обобщающе-преобразующий (саморазвитие личности («я могу сделать что-то новое»)); при этом осуществлены отбор, обоснование и разработка психодиагностических методик и оценочных процедур выявления и технологий реализации синергетических эффектов в обучении математике. Проявилась необходимость разработки среды дистанционного обучения математическим дисциплинам студентов педагогических и инженерных направлений подготовки, а также комплекс онлайн-курсов и дистанционных сред; разработано обеспечение ИКТ средств поддержки (в том числе, математического пакета компьютерной алгебры Mathematica) в решении сложных задач в обучении математике школьников и студентов [2]; была разработана технология «тетрады» в исследовательской деятельности школьников и студентов [3]: особенность здесь состоит в том, что обучающимся предстоит выполнять четыре вида творческой деятельности: а) творческая математическая деятельность; б) построение фрактальных множеств с разработкой алгоритмов и языков программирования высокого уровня; в) выполнение лабораторных работ по математике с проведением компьютерных экспериментов; г) изучение творческих биографий ученых и создание художественных композиций с помощью фракталов и ИКТ.

Все полученные результаты характеризуют проявление синергии математического образования в школе и вузе на основе адаптации современных достижений в науке, в основном, в формах интегративных и элективных курсов, проектной деятельности, лабораторно-расчетных и ресурсных занятий. Важнейшим фактором повышения эффективности математического образования является возможность реализации условий развития личности на основе адаптации современных достижений в науке к школьному и вузовскому обучению математике: информационной насыщенности мотивационного поля учения (в том числе , процессов цифровизации школы и вуза), множественности постановки целей и поиска бифуркационных переходов в математической деятельности, флуктуационного разнообразия параметризации и интеграции математических, информационных, естественнонаучных и гуманитарных знаний в построении математических результатов в форме аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных преобразований на основе математического и компьютерного моделирования (в том числе, использование возможностей использования нейронных сетей и интеллектуальных систем) , диалога культур и сетевого взаимодействия на единых информационных платформах исследовательской деятельности с учетом стохастичности процессов и обобщенности результатов, постановки эксперимента в математике и проявления синергетических эффектов развития личности в условиях продвижения к пониманию сущности математических объектов и процедур в ходе функционирования насыщенной информационно-образовательной среды.

Именно управление образовательными процессами на базе освоения сложного знания средствами математического и компьютерного моделирования способны дать мощный мотивационный заряд к изучению математических дисциплин; как следствие , повысится интерес к освоению математики с реальным развитием теоретического и эмпирического мышления (сравнение, аналогия, анализ, синтез и т.п.). При этом возможность адаптации современных достижений в науке к школьной математике и компьютерного интерактивного взаимодействия с учебным предметом усиливает развивающий эффект и повышает учебную и профессиональную мотивацию, выявляет связи с реальной жизнью и практикой, создает феномен проявления синергетических эффектов в освоении сложного математического знания. Обучающийся уже сейчас должен знакомиться с нелинейным стилем мышления в постнеклассических науках , знать и находить ассоциации в реальной жизни таких феноменов коллективной упорядоченности как эффект Жаботинского-Белоусова, ячейки Бинара («дорога гигантов» в Ирландии), теория Гинзбурга-Ландау сверхпроводимости в системе квантов, уравнения Лотки - Вольтерра в системе «хищник-жертва», снежинка Коха и цилиндр Шварца, сценарий Ферхюльста и «эффект бабочки» странного аттрактора Лоренца и т.п.

Ведущая идея такова: ключевым аспектом феномена проявления синергетических эффектов в обучении математике сложного знания на основе адаптации современных достижений в науке является возможность актуализации этапов и исследования характеристик освоения сущности сложных математических знаний, явлений и процедур, создания условий для коммуникаций и диалога культур, выявления атрибутов самоорганизации содержания, процессов и взаимодействий (аттракторы, точки бифуркации, бассейны притяжения, итерационные процедуры и т.п.) в ходе освоении «проблемных зон» математики. Тем самым, настоящее исследование представляет собой попытку разработки технологии адаптации современных достижений в науке к обучению вузовской математике на основе компьютерного моделирования и дизайна, наглядного и математического моделирования сложного знания в «проблемных зонах» математического образования с проявлением синергетических эффектов и выявления новых побочных продуктов исследования на основе самоорганизации когнитивной деятельности. Тем самым наметились перспективы адекватного ответа на современные вызовы и противоречия в математическом образовании, отвечающие потребностям развития современного производства и технологий, информационных , естественных и гуманитарных наук, личностного развития и математико-информационной компетентности каждого обучающегося, понимания современной естественнонаучной картины мира в XXI веке на базе развертывания и реализации синергетической парадигмы в математическом образовании в школе и вузе на основе адаптации и освоения сложного знания.

МЕТОДОЛОГИЯ, МЕТОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ

Современные реалии жизни, новых технологических укладов, необходимость эффективного развития креативности, критичности, нелинейного мышления у обучающихся ставит проблемы отражения в математическом образовании в школе и вузе проявлений синергии не только на уровне фрагментарного исследования результатов адаптации современных достижений в науке , но и на уровне реализации синергетической парадигмы в освоении содержания математического образования в школе и вузе, направленной на интеграцию науки и образования с эффектом развития нелинейного мышления обучающихся и повышения качества образовательных результатов. Последние десятилетия целый ряд ведущих ученых мира обращали внимание на необходимость пересмотра образовательных парадигм в направлении реализации синергетической парадигмы или парадигмы самоорганизации (Т.Кун, М.С.Каган, М.Бахтин, Э.Морен, В.Б.Буданов, В.С.Степин, Е.Н.Князева, Г.Г.Малинецкий, Б.Мандельброт, С.П.Курдюмов и др.). Научная проблема: каковы концепция, принципы, содержание характеристик, технологии, средства, формы и педагогические условия освоения сложного знания и реализации синергетической парадигмы математического образования в школе и вузе в контексте адаптации современных достижений науки к эффективному обучению математике, способствующие развитию нелинейного мышления, креативности и критичности личности и ее активному участию в жизнедеятельности общества ?

Исследование проблемы и реализация адекватной технологии связана с освоением обучающимися сложного знания средствами математического и компьютерного моделирования в насыщенной информационно-образовательной среде. Математическое образование как сложная и открытая социальная система несет в себе при этом огромный потенциал самоорганизации и позитивного проявления синергетических эффектов в разных направлениях: развитие и воспитание личности в проектной деятельности, упорядоченность содержания и структуры когнитивного опыта, коммуникации и социальное взаимодействие субъектов на основе диалога культур. ***Синергия математического образования*** *при этом будет рассматриваться нами как симбиоз и качественное изменение нелинейных эффектов самоорганизации и саморазвития личности в ходе освоения математической деятельности в условиях управления сложными стохастическими процессами на основе согласования разных факторов и начал в трех контекстах: содержательном (семиотическом), процессуальном (имитационном) и социально-адаптационном [4].* Последние аспекты особенно важны в педагогических системах ввиду возможности установления дополнительных горизонтальных связей на основе диалога культур и реализации контекстного подхода А.А. Вербицкого [5]. Синергия математического образования характеризуется при этом наличием *внутренних атрибутов (механизмов)* самоорганизации и параметров порядка, которые формируют успешность функционирования образовательной системы на все новых усложняющихся уровнях. При этом дидактические процессы приобретают новое качество: естественнонаучные знания обогащаются гуманитарным аспектом, гуманитарные знания приобретают научную основу обоснования сущности использованием естественнонаучного и математического аппарата и методов.

Важным контекстом является постановка *внешних факторов воздействия* в виде множественности целеполагания, выстраивания этапов и иерархий знаково-символической и образно-геометрической деятельности в направлении фундирования сущности математических объектов и процедур [6], поиска и анализа побочных решений с использованием информационных технологий , выявления бифуркационных переходов и бассейнов притяжения в исследуемых процессах на основе вариативности и параметризации, обеспечение когерентности информационных потоков в появлении новой продукта на основе диалога культур (в том числе, в условиях сетевого взаимодействия*)*. В работе [7] выявлены и охарактеризованы все этапы проявления синергии математического образования: подготовительный, содержательно-технологический, оценочно-коррекционный и обобщающе-преобразующий.

Ученые философы, педагоги и психологи (И.Кант, Г.В.Гегель, И.Пригожин, С.П.Курдюмов, Г.Хакен, К.Майнцер, В.В.Орлов, А.Н.Подъяков, В.С.Степин, И.С.Утробин, Х..Альвен, Т.С.Васильева и др.) убедительно показали, что эффективное развитие личности происходит при освоении сложного знания (разных уровней его сложности в зависимости от личностного развития обучающихся, включая инклюзивное образование), создания ситуаций преодоления трудностей в процессе освоения знаний и единой картины мира на основе высокой степени развертывания учебной и профессиональной мотивации обучающихся в единой сети взаимодействий, самостоятельности и когерентности. В познании сложного сам процесс познания «становится коммуникацией, петлей между познанием (феноменом, объектом) и познанием этого познания» (Э. Морен).

Вместе с А.Н. Подъяковым [8] отметим следующие особенности в решении сложных задач в математическом образовании:

- в поведении и развитии комплексной динамической системы, такой как математическое образование, всегда есть доля неопределенности и непредсказуемости; она требует множества разнообразных описаний и решений как в содержании, так и в когнитивных процессах, отличающихся друг от друга и дополняющих друг друга; не менее эффективными орудиями являются при этом понятия нестрогие и нечеткие, построенные на основе эмпирических, а не теоретических обобщений, исследование которых невозможно без использования компьютерного и математического моделирования;
- комплексная система освоения учебных элементов характеризуется изменениями не только на уровне конкретных проявлений, но и на уровне своей сущности (обобщенных конструктов), наиболее значимой для актуализации процессов понимания и наличия развивающих эффектов самоорганизации. В сложных образовательных системах эффективные правила (фундирующие модусы (Е.И.Смирнов [9]) поэтапного развертывания сущности могут быть выделены (в том числе методом обратных задач теории самоорганизации (Г.Г. Малинецкий, [10])), но они будут с неизбежностью достаточно вариативны по типам самоорганизации на основе реализации наглядного моделирования (Е.И.Смирнов [11]) и принципиально зависимы от контекста;
- теоретические модели сколь угодно высокого уровня принципиально ограничены. Для эффективного исследования сложных динамических систем необходимы разнообразные поисковые пробы (экспериментальные срезы, сравнительный анализ конкретных проявлений, компьютерное моделирование, аналогии, анализ через синтез (S.L. Rubinstein [12]) и т.п.) – реальные взаимодействия с системой, а не только теоретическая деятельность с ее абстрактными моделями;.
- при исследовании сложной системы необходима вариативность целеполагания – постановка разнообразных, разнотипных и разноуровневых целей (множественное целеполагание), которые могут конкурировать между собой. Одним из основных эмоциональных состояний человека при исследовании сложных систем

в математическом образовании является неуверенность, сомнение, готовность принять двоякие (на основе прогноза и случайные) результаты действий, и т.д.;

- результаты деятельности человека со сложной системой содержания и методов математического образования, результаты взаимодействия с ней не могут быть предсказаны полностью, исчерпывающим образом. Возможны только вероятностно гарантированные результаты образования. Причем наряду с прямыми, прогнозируемыми результатами образования образуются разнообразные побочные, непредсказуемые продукты личностного развития и математической деятельности как в школе, так и в вузе.

Выделим следующие *системно - генетические контексты проявления синергии* в математическом образовании в вузе (ср. А.А.Вербицкий [5]).

1. **Процессуальные контексты.** Базовым понятием представленной концепции адаптации современных достижений в науке является принцип и технология фундирования опыта личности (Э. Гуссерль, В.Д. Шадриковым - Е.И. Смирновым [13] и др.). Поэтому концепция фундирования процесса становления личности выступает как эффективный механизм преодоления профессиональных кризисов становления специалиста и актуализации интегративных связей между наукой, профессиональным образованием и школой. *Адаптационные процессы* рассматриваются учеными психологами и педагогами как динамический комплекс интегрального взаимодействия внутренних результатов (системы знаний, умений, установок, компетенций, ценностей) и адекватных механизмов приспособления личности к изменениям внешней среды и результатам деятельности с развивающим эффектом (А.А. Реан [14], Ю.И. Толстых [15], С.И. Сороко [16] и др.). В соответствии с С.Н. Дворяткиной и С.А. Розановой [17] таковыми могут быть синергетические эффекты реализации адаптационных процессов: когнитивный, мотивационный, профессиональный, креативный, социально- экономический и духовно-нравственный. Процессы создания *мотивационного поля* для исследования сложных математических конструктов требуют компьютерного дизайна и наглядного моделирования современных достижений в науке (странный аттрактор Лоренца, нечеткие множества и fuzzy-logic, губка Менгера, сценарий Ферхюльста и т.п.). *Выстраивание иерархий* в развертывании сущности обобщенного конструкта «проблемной зоны» на основе *параметризации и абстрагирования*, поиска *точек бифуркации и бассейнов притяжения* средствами построения итерационных процессов на основе информационно-технологической поддержки создают механизмы адаптации сложного знания к школьной и вузовской математике.

2. Содержательный контекст проявления синергии в математической деятельности как раз и является тем сензитивным механизмом, который позволит актуализировать *факторы успешности* решения творческих задач на основе исследовательской активности и самоорганизации обучающихся. Поэтому основным средством проявления синергии математического образования и механизмом формирования исследовательского поведения школьников в процессе обучения математике мы считаем разработку и внедрение в учебный процесс *исследовательских практико-ориентированных сложных задач в «проблемных зонах» в форме комплекса многоэтапных математико-информационных заданий* (М.Клякля, В.С.Секованов, Е.И.Смирнов и др.). Исследовательская деятельность обучающихся реализуется в специально организованной среде (например, ресурсных занятий [18]) на фоне роста мотивов самоактуализации и самоорганизации, выявления приоритета ценностных ориентаций в математической деятельности. Немаловажным фактором содержательного контекста проявления синергии математического образования является продуктивная *деятельность по исследованию новых математических свойств и характеристик обобщенных конструктов самоорганизации*: фрактальных объектов, математических моделей неустойчивости решений нелинейных динамических систем, средств кодирования и шифрования, клеточных автоматов, нечетких множеств и fuzzy logic, компьютерного моделирования многогранных поверхностей цилиндра Шварца, стохастических структур на странных аттракторах и т.п. (В.С.Секованов, Е.И.Смирнов, С.Н.Дворяткина , Е.И.Смирнов, А.Д.Уваров .

3. *Личностно - адаптационный и социальный контекст проявления синергии математического образования.* Взаимодействие человека с миром и людьми активизирует его внутренние потенциалы, что выступает основой его самопознания, саморегуляции и самоактуализации, обеспечивая тем самым его личностное саморазвитие. В связи с этим, особое внимание нами уделено рассмотрению проблем организации группового взаимодействия обучающихся, являющегося важнейшим источником их самоактуализации и развития, стимулом для творческой активности и дальнейшего личностного роста. Фундирующие процедуры перехода от наличного состояния сущности к обобщенному потенциальному ее развитию в форме идеального объекта (процесса или явления, состояния личностных качеств) являются многоэтапными, полифункциональными, направленными и интегративными по актуализации внутри и межпредметных связей. *Личностно-адаптационный компонент* связан с выраженностью характеристик и качеств личностного развития и адаптации обучающегося в процессе освоения современного научного знания в направлении самоактуализации («мне это интересно») , самоопределения («что я могу сделать»), самоорганизации («я способен управлять процессом»), саморазвития («я могу сделать что-то новое»)[19].

Технология проявления синергии в исследовании «проблемных зон» математического образования

Отметим, что ориентиром для проектирования технологии адаптации сложного знания в процессе обучения математике будет для нас исследования и инструментарий технологических карт В.М.Монахова [20], которые «…представляются тремя инструментальными составляющими: первая – диагностика (то, что будет диагностироваться); вторая – дозирование (то, что обеспечивает вероятностную гарантированность предстоящей когнитивной деятельности на базе успешной диагностики); третья составляющая – это система коррекционной профилактики…»[1].

Нам представляется следующая коррекция последовательности введения инструментальных составляющих технологической карты развертывания этапов адаптации сложного знания:

- ✓ диагностика синергетических эффектов и наличного состояния личностных смыслов и предпочтений в способах освоения математического содержания;
- ✓ определение критериев отбора, объема, структуры и содержания «проблемных зон» в освоении математического знания, обладающих потенциалом сложности и возможностями проявления синергии в обучении математике;
- ✓ исследование образцов научных проблем (на эталонном и ситуативном уровнях) с проявлением синергии сложного знания средствами математики на основе реализации ИКТ-средств поддержки математического образования;

[1] Монахов В.М., Тихомиров С.А. Системный подход к методическому раскрытию прогностического потенциала образовательных стандартов // Ярославский педагогический вестник. – 2016. – №6. – С.117-126.

- ✓ актуализация атрибутов и параметров проявления синергии научной проблемы («проблемной зоны» математического образования) с детализацией, анализом, особенностями и этапами;
- ✓ актуализация, обобщение и оценка математических, информационных, гуманитарных и естественнонаучных знаний и методов в процессуальном периоде исследования «проблемной зоны» в контексте интеграции, этапности и вариативности проявлений.

Технология выявления и исследования «зон современных достижений в науке (проблемных зон), адаптации их применительно к обучению математике позволяет проектировать и реализовывать этапы адаптации современных достижений в науке к наличному состоянию опыта математической деятельности школьников , позволяет интегрировать знания из различных областей наук в контексте освоения сложного знания. Выделим ряд **технологических этапов развертывания фундирующих процедур** *в процессах адаптации сложного знания* к школьной и вузовской математике с проявлением синергетических эффектов и отражения *феноменологического типа моделирования сущности* обобщенного конструкта:

1. **Освоение эталонов и образцов феноменологии наглядного моделирования обобщенного конструкта и результатов диагностических процедур** конкретных проявлений сущности обобщенного конструкта;
2. **Создание мотивационное поля в освоении обобщенного конструкта:** наглядное моделирование *(уроки-лекции, видео - клипы, проектная деятельность, презентации, деловые игры)* мотивационно - прикладных ситуаций различного толкования эталонов и образцов проявления синергии ;
3. ***Задачи*** для актуализации развертывания *индивидуальных образовательных траекторий для малых групп студентов* (определение состава и направленности малых групп , распределение ролей, выбор и актуализация практико-ориентированной исследовательской деятельности по этапам фундирования и адаптации обобщенного конструкта:
4. **Множественное целеполагание** процессов исследования обобщенного конструкта «проблемной зоны»:
5. **Готовность к дискуссиям и множественности решений** проблемы; выявление критериев отбора, постановки и поиска решения исследовательских практико-ориентированных задач на основе диагностической информации, систематизированных в форме фундирующих комплексов;
6. **Создание творческой среды** в процессе освоения сущности обобщенного конструкта (стимулирование ситуации успеха; работа в малых группах и диалог культур; толерантность к неопределенности и развитие дивергентного мышления; выявление и популяризация образцов творческого поведения и его результатов); сбор и разнообразие форм и методов представления информации; освоение статистических пакетов и офисных редакторов, систем компьютерной алгебры и Web- поддержки;
7. Умения адаптироваться и развиваться в социальных коммуникациях на основе диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур. **Эффективный диалог математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур** на основе компьютерного и математического моделирования компонентов и этапов адаптации обобщенного конструкта «зоны современных достижений в науке» **в** вузовской математике;

8. **Актуализация атрибутов синергии (бифуркации, аттракторы, флуктуации, бассейны притяжения)** в процессе исследования обобщенного конструкта, фундирования; **в**ыявление закономерностей, аналогий , ассоциаций, динамики исследуемых процессов, явлений и фактов; прогноз и «побочные продукты» исследования.

Синергетический эффект исследования многогранных поверхностей цилиндра Шварца

Пример 1. Математическое образование как сложная и открытая социальная система несет в себе огромный потенциал самоорганизации и позитивного проявления синергетических эффектов в разных направлениях: развитие и воспитание личности , упорядоченность содержания и структуры когнитивного опыта, коммуникации и социальное взаимодействие субъектов на основе диалога культур. При этом необходимо проектировать приемы и способы отражения и исследования технологических параметров обобщенного конструкта на фоне функционирования системы адаптации и получения новых результатов: в нашем случае обобщенный конструкт научного знания – *понятие площади поверхности* косвенно актуализируется через компьютерное и математическое моделирование процессов *исследования «площади» боковой поверхности цилиндра Шварца* [21-22].

Множественное целеполагание процессов *актуализации понятия площади поверхности приемами исследования «площади» цилиндра Шварца (содержательный аспект)*): патологические свойства «площади» боковой поверхности цилиндра хорошо изучены в так называемом «регулярном» случае (см. например [23]). Это происходит тогда, когда его высота H разбивается на m равных частей (соответственно – слоев цилиндра), а окружность лежащая в основании делится на n равных частей с последующим сдвигом φ на каждом слое на $\frac{\pi}{n}$. При такой триангуляции боковой поверхности цилиндра, формула для вычисления ее «площади», посредством получившихся многогранников при $m,n \to \infty$ имеет вид:

$$S_q = 2\pi R\sqrt{R^2\frac{\pi^4}{4}q^2 + H^2}\ ,\ \text{где: } q = \lim_{m,n\to\infty}\frac{m}{n^2}\ . \quad (1)$$

Таким образом, «площадь» боковой поверхности S_q регулярного цилиндра Шварца высоты H и радиуса R (если данный предел существует – конечный или бесконечный) полностью определяется пределом (1). При этом ввиду независимого характера стремления $m,n \to \infty$ результат предельного процесса становится слабо прогнозируемым, многозначным, с отсутствием закономерностей в хаотическом развертывании фрактальных структур многогранников. Б.Мандельброт [22] показал, что при $m = n^k$ площадь многогранной поверхности растет как n^k $(k \neq 2)$. Возникают иерархии вопросов, связанных с исследованием многогранных поверхностей цилиндра Шварца и решаемых средствами компьютерного и математического моделирования исследовательской деятельности в малых группах школьников в дистанционной среде или в форме исследования многоэтапных математико-информационных заданий. Подобные исследования, проведенные студентами на ресурсных или лабораторно-расчетных занятиях, при выполнении многоэтапных математико-информационных заданий, в ходе проектной деятельности или сетевого взаимодействия развивают интеллектуальные операции мышления, повышают учебную мотивацию и качество освоения математических действий.

Рассмотрим окружность с центром в точке A и радиусом $g_1 = 1$. В окружность вписан правильный шестиугольник и проведен радиус AT так, что AT пересекает сторону шестиугольника в точке U. Предположим, что точка T движется по окружности. При этом поставим в соответствие центральному углу $c_1 = \alpha$ длину отрезка UT, получим функцию $f(\alpha)$. Введенная функция является ограниченной и периодической, а именно $0 \le |\mathrm{f}(\alpha)| \le 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ и период $T = \frac{\pi}{6}$. Функцию $f(\alpha)$ можно определить явным образом.:

$$f(\alpha) = 1 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin(120^0 - (\alpha - [\frac{\alpha}{60^0}] \cdot 60^0))}\ . \ (2)$$

Несложно определить функцию $f_n(\alpha)$, подобную функции из формулы (2) в случае, когда в окружность вписан произвольный правильный n-угольник. Действительно, обозначим через $\varphi = \frac{360^0}{n}$ центральный угол вписанного n-угольника, тогда $f_n(\alpha)$ примет вид:

$$f_n(\alpha) = 1 - \frac{\sin(90^0 - \frac{\varphi}{2})}{\sin(90^0 + \frac{\varphi}{2} - (\alpha - [\frac{\alpha}{\varphi}] \cdot \varphi))}\ . \ (3)$$

Определим следующую функцию $g(\alpha)$ как функциональный ряд:

$$g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k \cdot n}(\alpha)\ , \ (4)$$

где функции $f_{k \cdot n}(\alpha)$ определяются формулой (3). Легко видеть, что график функции $g(\alpha)$ имеет фрактальную структуру, наподобие графика функции Ван Дер Вардена [19]. Теперь рассмотрим слой цилиндра Шварца, пересеченный плоскостью ортогональной его оси. Возникает естественная задача. *Пусть задан цилиндр Шварца высоты* $H = 1$ *и радиуса* $R = 1$. *При этом его верхнее основание разбивается на n равных частей, а высота на m равных частей. Проведем сечение перпендикулярное оси цилиндра через произвольную точку x на ней. Если* n *стремится к бесконечности, а* m *фиксировано, то какой вид будет иметь функция* $g(\alpha)$, *определенная в формуле (4)?*

Если предположить, что в формуле (4) переменные α и ε независимы, то на ряд, определяемый этой формулой, можно смотреть как на функцию двух переменных $s(\alpha, x)$. Графиком этой функции будет поверхность («Кубок Шварца»). На следующем рисунке изображена часть поверхности $z = s(\alpha, x)$, при этом $0^0 \le \alpha \le 360^0$ и $0 \le x \le \frac{1}{30}$. Полагаем, что высота одного слоя цилиндра Шварца равна $\frac{1}{30}$ (для наглядности поверхность изображена в цилиндрической системе координат). На последнем рисунке линии уровня, изображенные желтым цветом, соответствуют графикам функции $g(\alpha)$ в полярной системе координат при $k=0, k=\frac{1}{3}, k=\frac{2}{3}, k=1$.

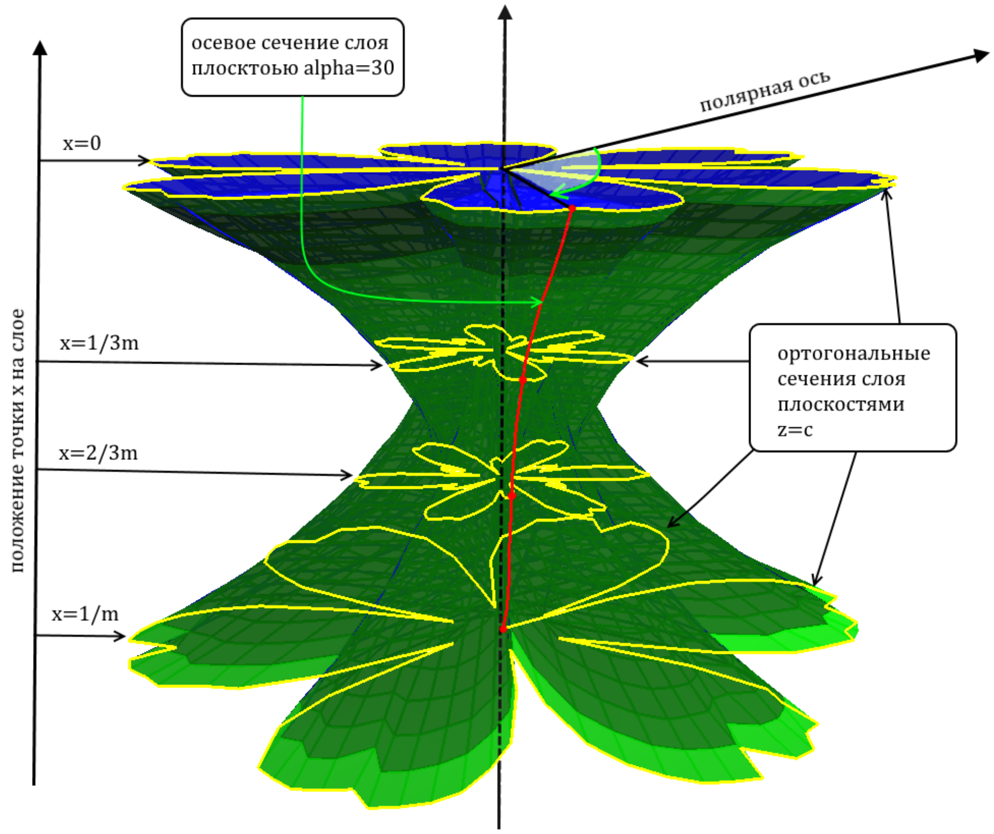


Рис.1. «Кубок Шварца» как фрактальная поверхность

Аналогично могут быть исследованы другие «зоны современных достижений в науке»: элементы фрактальной геометрии, клеточные автоматы, кодирование и шифрование информации, теория хаоса и катастроф. Как показывает рассмотренный пример лонгитюдное исследование «зон современных достижений в науке» предъявляет повышенные требования к их отбору и количеству, в то же время развивающий эффект от освоения школьниками сложного знания в контексте современных достижений в науке и диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур трудно переоценить.

Результаты. Таким образом, выявлены и характеризованы содержание, компьютерный дизайн и технология адаптации сложного знания в ходе исследования обобщенных конструктов выявления сущности одной из «проблемных зон» школьной или вузовской математики (например, площади поверхности в детализации нелинейной динамики роста площадей многогранных комплексов при измельчении триангуляций боковой поверхности цилиндра или «сапога» Шварца средствами компьютерного и математического моделирования). Выявлены и характеризованы этапы адаптационных процессов, технология исследования сложного знания, точки бифуркации, бассейны притяжения, вычислительные процедуры и флуктуации параметров состояния, компьютерный дизайн и побочные результаты исследования. Выстроены иерархии форм и средств исследовательской деятельности школьников:

ресурсные и лабораторно-расчетные занятия, комплексы многоэтапных математико-информационных заданий, проектные методы и сетевое взаимодействие.

Список литературы

1. Смирнов Е.И., Богун В.В., Уваров А.Д. Синергия математического образования: Введение в анализ. Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2016. 216 с.
2. Богун В.В. Обработка форм в рамках динамических Интернет-сайтов: учебное пособие. Ярославль: РИО ЯГПУ, 2018. 156 с.
3. Секованов В.С. Элементы теории дискретных динамических систем. С-Петербург: Изд-во «Лань», 2016. 180 с.
4. Дворяткина С.Н., Смирнов, Е.И. Оценка синергетических эффектов интеграции знаний и деятельности на основе компьютерного моделирования // Современные информационные технологии и ИТ–образование. М.: 2016. МГУ, С. 35–42.
5. Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход. М.: "Высшая школа", 1991. 207 с.
6. Смирнов Е.И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога: монография. Ярославль.: Изд-во «Канцлер», 2012. 654 с.
8. Смирнов Е.И., Уваров А.Д., Смирнов Н.Е. Компьютерный дизайн нелинейного роста «площадей» нерегулярного цилиндра Шварца // Евразийское научное обозрение. Москва. 2017. Т.30. №8. С.35-55.
7. Подьяков А.Н. Психология обучения в условиях новизны, сложности, неопределенности. Психологические исследования. М.: Высшая школа экономики, 2015. С. 6-10.
8. Осташков В.Н., Смирнов Е.И. Синергия образования в исследовании аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных отображений: Ярославский педагогический вестник. Серия психолого-педагогических наук. Ярославль.: Изд-во ЯГПУ, 2016. №6. С.146-157.
9. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подласов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: УРСС, 2006.
10. Смирнов Е.И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Монография. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1997. 323 с.
11. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. М.: АН СССР, 1958.
12. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы // Под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики. 2002. 383 с.
13. Реан А.А. Психология адаптации личности. СПб.: Прайм-Еврознак, 2008. 479 с.
14. Толстых Ю.И. Современные подходы к категории «адаптационный потенциал» // Известия ТулГУ. Гуманит.наука. 2011. №1. С.493-496.
15. Сороко С.И. Индивидуальные стратегии адаптации человека в экстремальных условиях // Философия человека. 2012. Т.38. №6. С.78-86.
16. Розанова С.А. Эффекты синергии математического, естественнонаучного и гуманитарного образования: структура, основные характеристики // Математика, физика и информатика и их приложения в науке и образовании: сборник тезисов докладов международной школы-конференции молодых ученых. Москва: МИРЭА, 2016. С.243-245.
17. Смирнов Е.И. Активность и развитие интеллектуальных операций у школьников во взаимодействии физики и математики: Вестник развития науки и образования. М.: Изд. Дом «Наука образования», 2013. №3. С.25-50.
18. Смирнов Е.И. Сложность задач и синергия математического образования / Е.И. Смирнов, С.Ф. Бурухин // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт и инновации: материалы междунар. научно–практ. конф., посвященной 125-летию П.А. Ларичева. Вологда: 2017. С. 11–17.

19. Монахов В.М., Тихомиров С.А. Системный подход к методическому раскрытию прогностического потенциала образовательных стандартов // Ярославский педагогический вестник. Серия психолого-педагогических наук. 2016. №6. С.117–126.
20. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 656 с.
21. Schwartz H.A. Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe: Gesammelte Mathematische Abhandlungen, 1890. №1. pp. 309-311.
22. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов. М.: Физматлит, 2001. Т.1. 616 с.

TECHNOLOGY OF ADAPTATION OF COMPLEX KNOWLEDGE FOR TEACHING MATHEMATICS

E.I. Smirnov
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
smiei@mail.ru
Yaroslavl
Yaroslavl State Pedagogical University them. KD Ushinsky

E.A. Zubova
Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor
eazubova@rambler.ru
Tyumen
Tyumen Oil and Gas the university

Abstract. This article examines the processes of modernization of mathematical education in schools and universities with the manifestation of synergistic effects based on the identification and study of "problem areas" of mastering complex knowledge by means of information, computer and mathematical modeling. The study concerns the tasks of students learning complex mathematical concepts and procedures in the context of the implementation of didactic and computer models of level and phased self-organization of cognitive processes and visual modeling of objects and procedures. At the same time, the processes of identifying the essence of basic educational elements (surface area, functional dependencies, iterative processes, numerical and asymptotic methods, geometric transformations and figures, etc.) are implemented on the basis of visual modeling. The basic factor in the manifestation of synergistic effects is the actualization of modern advances in science (fractal geometry, coding theory, fuzzy sets and fuzzy-logic, L. Schwartz's distribution theory, nonlinear dynamics, etc.) and the implementation of the content and structure of the adaptation of the most important generalized constructions to the cash the state of school and university mathematics knowledge and competencies related to the analysis and the essence of the emerging and associated "problem zone" of school or university mathematics. The effectiveness of the management processes of mathematical education with a synergistic effect for the development of intellectual operations of thinking and improving the quality of students' mastering mathematical constructs and procedures during vocational subject training under conditions of uncertainty, variability and self-organization of cognitive processes is shown.

Keywords: synergy, adaptation of complex knowledge, foundation foundations, mathematical modeling, computer design.

УДК 51(09), 908

ИСТОРИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В ЛГУ

Ирина Ивановна Демидова
к.ф.-м. н, ст.н.с.
maria_ib@mail.ru
г. Санкт-Петербург

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. Анализируется история применения интегральных уравнений Вольтерра для описания особенностей поведения реальных полимерных материалов в неизотермических условиях и для решения задач термовязкоупругости и фототермовязкоупругости.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра 2 рода, обобщённые кривые, термовязкоупругость, фототермовязкоупругость.

К 105 – летию Ю.Н. Работнова, Л.М. Качанова
и 90-летию И.И. Бугакова

Введение. В механике деформируемого твёрдого тела есть дисциплина теория ползучести, в которой изучаются зависимости деформации материалов от продолжительности действия нагрузок. Ползучесть свойственна всем реальным материалам, в частности, полимерным материалам при любых температурах. В числе первых исследователей, обнаруживших явление деформирования материалов во времени при постоянной нагрузке были Л.Вика (1834, изучал свойства бетона), В. Вебер (1835, провёл эксперименты с шёлковыми нитями и обнаружил явление, которое позднее было названо упругим последействием), В. Кольрауш (1847, физик, изучал упругое последействие). Д. Максвелл (1867) впервые представил закон деформирования по времени в виде дифференциального уравнения. Несколько позднее в 1874 году Л. Больцман предложил феноменологическую линейную теорию ползучести изотропных материалов, основанную на принципе сложения, и опубликовал более общий математический аппарат для описания явления линейной ползучести. Этот аппарат является и в настоящее время разделом теории интегральных уравнений. В 1909 году В. Вольтерра построил иным путем те же уравнения.

Известный итальянский математик и физик Вито Вольтерра (1860-1940), член-корреспондент Физико-математического отделения Петербургской академии наук (1908 год), почётный член АН СССР (1926 год) работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений функционального анализа, теории упругости. С 1884 года учёный начал исследования интегральных уравнений при решении проблемы, посвящённой распределению электрического заряда на сферическом сегменте. Он показал, что эта задача приводит к решению уравнения, которое в современных терминах называется интегральным уравнением первого рода с симметричным ядром [1]. Позднее Вольтерра перешёл к рассмотрению интегрального уравнения второго рода с переменным верхним пределом интегрирования.

$$\ddot{F}a = \int_0^t F(t-\omega)da(\omega) \tag{1}$$

Здесь F(t)–материальная функция; F(t)=0 при t<0, F(0) = F_0 при t=0. Интегрирование правой части (1) по частям дает

$$\ddot{F}_a = F_0 a(t) + \int_0^t \dot{F}(t-\omega)a(\omega)d\omega\,. \tag{2}$$

Точка означает производную по временному аргументу t. Оператор **F** полностью определяется функцией F(t). Развитие теории шло по линии связи ее с экспериментами путем подбора ядер F(t) интегральных зависимостей. Были развиты направления общей линейной наследственной теории для разных отраслей техники, связанных с использованием различных материалов.

Такой специальный тип интегральных уравнений получил название интегральное уравнение типа Вольтерра. Учёный использовал уравнения в астрономии (Об изменяемости широт,1898), в физике (О потоке механической энергии, 1899). Он старался охватить предмет как можно шире и придать изложению увлекательную форму. Таким было выступление Вито Вольтерры в 1901 при вступлении в должность руководителя кафедры в Римском университете - «О некоторых возможностях применения математики к биологии и экономике») и при изучении вязкоупругих материалов. [1,37 стр.] С 1906 года Вольтерра в «Стокгольмских лекциях по уравнениям в частных производных отметил возможность с единой точки зрения рассмотреть различные задачи по теории потенциала, распространению волн, электродинамике, теории упругости». С 1900 по 1914 г. он обратился к созданию математического аппарата теории дисторсий, теории остаточного состояния и создал новую дисциплину- теорию упругости многосвязных тел.[1, 41 стр.] Результаты своих исследований проверил сам учёный экспериментально, а инженеры из Рима проверили его результаты методом фотоупругости [1, 49 стр.] Начиная с 1908 года, Вольтерра посвятил исследованию принципа остаточного действия. Он продолжил исследование уравнения, предложенного в 1874 году Больцманом для упругой среды при наличии вязкости в одномерном случае между напряжением и деформацией.

Поскольку в 60-е годы полимерные материалы начали интенсивно применяться в технике, возник вопрос о прочности и надёжности конструкций из таких материалов. Л. М. Качанов (1914-1993), бессменный заведующий кафедрой теории упругости мат-меха ЛГУ с 1956 до 1977, внёс значительный вклад в теорию пластичности, ползучести, механику разрушения. На кафедре с 1929 года существовала лаборатория фотоупругости, в которой исследовалось напряженное состояние в моделях конструкций [2]. Материалы моделей выбирались из оптически чувствительных полимерных материалов. При решении задач на объёмных моделях использовались методы «замораживания», т.е. нагревания модели под нагрузкой и охлаждении. Л.М. Качанов обратил внимание на возможность обоснования применяемых методов, описания механических свойств полимерных материалов и функционирование конструкций из полимеров и их композиций на основе уравнений Вольтерра и предложил аспиранту И.И. Бугакову (1929-1989) тему диссертации применительно к методу фотоупругости.

В. Вольтерра
(1860-1940)

Л. М. Качанов
(1914-1993)

И.И. Бугаков
(1929- 1989)

Метод фотоползучести. История развития метода фотоползучести тесно связана с развитием теории ползучести для металлов, поскольку сначала на полимерных материалах моделировалась ползучесть металлов, а первые полимерные материалы были, в основном, линейными с узким температурным интервалом для проведения исследований.

Для описания поведения полимеров в линейной теории ползучести предлагалось использовать интегральные соотношения наследственного типа Больцмана-Вольтерра. Первые исследования И.И. Бугакова образцов из целлулоида на ползучесть показали, что этот материал в узком интервале нагрузок и температур обладает ползучестью. Им были получены линейные зависимости между оптическими и механическими свойствами материала, разработан метод изохронных кривых. Показано, что возможно моделировать на этом материале задачи ползучести для металлов [2].

Приведенное время. А.Р. Ржаницин (1911-1987)- член-корреспондент Академии по строительству и архитектуре, известный специалист по строительной механике, теории упругости и теории ползучести, развил теорию Больцмана - Вольтерра для учета изменяющейся температуры, применив принцип температурно-временного соответствия для механических параметров. Основные идеи принципа (1939 г.) были высказаны в работах А.П. Александрова (1903-1994), физик, академик АН СССР, и Ю.С. Лазуркина (1916-2009), специалиста в области химии и физики полимеров. Влияние температуры на реологические свойства материалов можно учесть с помощью внутреннего (приведенного) времени ξ, которое связывается с внешним временем t зависимостью в интегральной форме

$$\xi(t) = \int_0^t g[T(\rho)]d\rho \tag{3}$$

при начальном условии $\xi = 0$ при $t = 0$. Здесь g– материальная функция температуры, называемая масштабом времени. Это непрерывная неотрицательная возрастающая функция: $dg/dT>0$.

Система уравнений фототермовязкоупругости (фтву). При решении задач методом фтву модели изготавливают из оптически чувствительных полимерных материалов, нагружают в соответствии с условиями задачи, измеряют оптические характеристики: δ- оптическая разность хода, φ - параметр изоклины. И далее численными методами находят напряжение

$$\sigma_{11}(x_i, t) - \sigma_{22}(x_i, t) = \mathbf{R}_\xi\, \delta(x_i, t) \cos 2\varphi(x_i, t) \quad (4)$$

$$\sigma_{12}(x_i, t) = (1/2)\, \mathbf{R}_\xi\, \delta(x_i, t) \sin 2\varphi(x_i, t) \quad (5)$$

где $\mathbf{R}_\xi = \mathbf{C}_\xi^{-1}$- оптический оператор, определяемый функцией R(ξ). Из уравнений (4), (5) можно найти только касательное напряжение и разность нормальных напряжений. Для того, чтобы найти каждое из нормальных напряжений по отдельности, добавляется дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad (6)$$

и граничное условие в напряжениях.

Обобщённые функции. Для определения функций, определяющих операторы $\mathbf{R}_\xi$, необходимо было провести эксперименты на образцах с известным распределением напряжений.

Для исследуемого материала проверялись принцип суперпозиции и принцип температурно- временного соответствия, находили области линейности.

Кроме этого, для перехода от решения модельной задачи к натуре необходимо исследование и механических свойств материала. Реологические уравнения линейной неизотермической ползучести для изотропных полимерных материалов в области линейной ползучести запишутся в виде

$$\varepsilon_{ij}(t) = (1+\boldsymbol{\nu}_\xi)\, \mathbf{D}_\xi\, \sigma_{ij}'(t) + \mathbf{K}\, \sigma_m(t)\, \delta_{ij} + \varepsilon^T(t)\, \delta_{ij} \quad (7)$$

$\mathbf{D}_\xi$,–неизотермический оператор ползучести при одноосном растяжении и сжатии, $\boldsymbol{\nu}_\xi$ –неизотермический оператор поперечной ползучести, соответствующий коэффициенту Пуассона, **К** –податливость при гидростатическом давлении. На основании опытов построены обобщённые оптическая C(ξ) и механическая D(ξ) функции ползучести в широком интервале времени ξ, охватывающем более 14 десятичных порядков рис. 1.

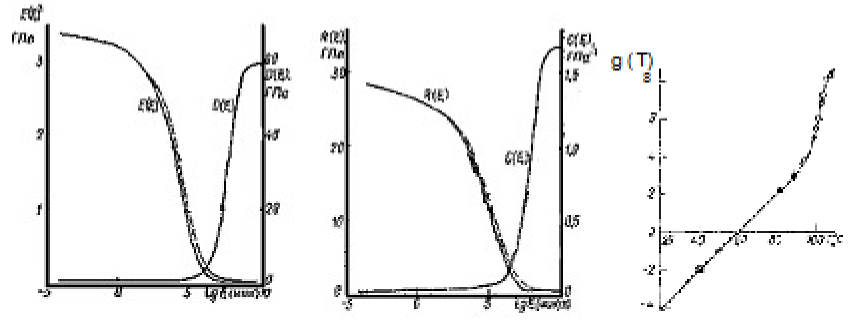


Рис.1.Обобщённые механические функции D(ξ), E(ξ) и оптические кривые ползучести C(ξ), R(ξ) и функция смещения g (T)

Полученные результаты показали, что эпоксидный полимер ЭД-20 является термореологически и термооптически простым материалом. Обобщенные кривые используются для решения разнообразных задач термовязкоупругости и для расшифровки интерференционных картин.

Численная реализация метода. Часто при математическом решении задач ползучести удобным оказывается применение оператора $\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1}$, при экспериментальном решении - оператора $\mathbf{R} = \mathbf{C}^{-1}$, входящего в уравнения (4, 5, 7). Функции E(ξ) и R(ξ), определяющие операторы **E** и **R** находятся из решения линейных интегральных уравнений Вольтера 11 рода

$$\mathbf{D}E(\xi) = h(\xi),\ \mathbf{C}R(\xi) = h(\xi).$$

Для проведения расчётов совместно с В.С, Екельчиком (1936), известным специалистом по изготовлению конструкций из композитных материалов для кораблей, была предпринята попытка аналитического описания обобщенных функции C(ξ) и E(ξ) дробно-экспоненциальными функциями Ю.Н. Работнова. Отметим, что Ю.Н. Работнов (1914- 1985) - академик АН СССР. Основные работы Ю. Н. Работнова относятся к теории упругости и пластичности, теории оболочек и устойчивости упруго-вязкопластических систем, теории ползучести металлов и наследственной теории упругости, механике разрушения и механике композиционных материалов. В частности, он стал одним из создателей теории ползучести металлов.

Оказалось, что достаточно точное описание обобщённых функций D(ξ) и C (ξ) во всем интервале возможно только суммой не менее трех интегралов от $Э_\alpha$ - функций (с одинаковым показателем дробности α как для D(ξ), так и для C (ξ).

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^t Э_\alpha\left(-\beta_i, \tau\right) d\tau\right]$$

Такое представление значительно усложнило бы численный расчёт.

Поскольку обобщённые кривые невозможно было описать простыми аналитическими функциями, то после консультаций с проф. С.Г. Михлиным (1908-1990), выдающимся специалистом в области интегральных уравнений и численных методов, и ст.н.с. В.Я. Ривкиндом (1940–1996), специалистом по численным методам решения задач гидромеханики и теории упругости, было принято решение о численном решении поставленных задач. Расчёты проводились на машинах М-222 на базе вычислительного центра математико-механического факультета ЛГУ. Программы вычислений были составлены и отлажены аспиранткой Лобановой Г.Ф., инженером Уткиным А.А. В программах для ЭВМ предусмотрено табличное задание функций материала.

Примеры решения термовязкоупругих задач методом фтву. Далее были решены температурные задачи вязкоупругости при действии однородных и неоднородных, стационарных и нестационарных температурных полей, а также задачи для составных тел.

Задача об однородном нагревании и охлаждении составных моделей в жёстком кольце из металла: 1 – стержень, 2- кольцо, 3- модель «звёздочка».

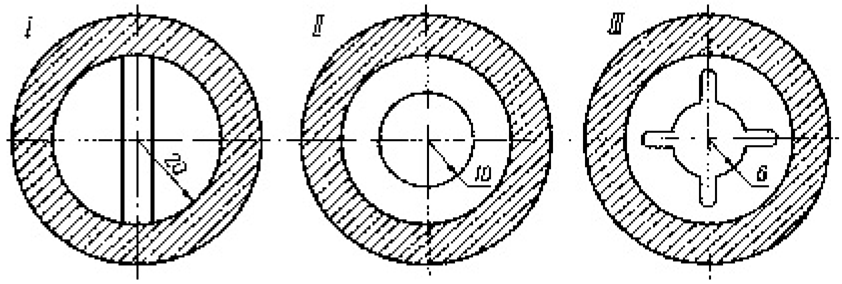


Рис. 2. Исследованные составные модели

По измеренному двупреломлению вычислили кинетику напряжений, используя обобщённые кривые, которые строятся для конкретного материала и программы изменения температуры (Рис.3).

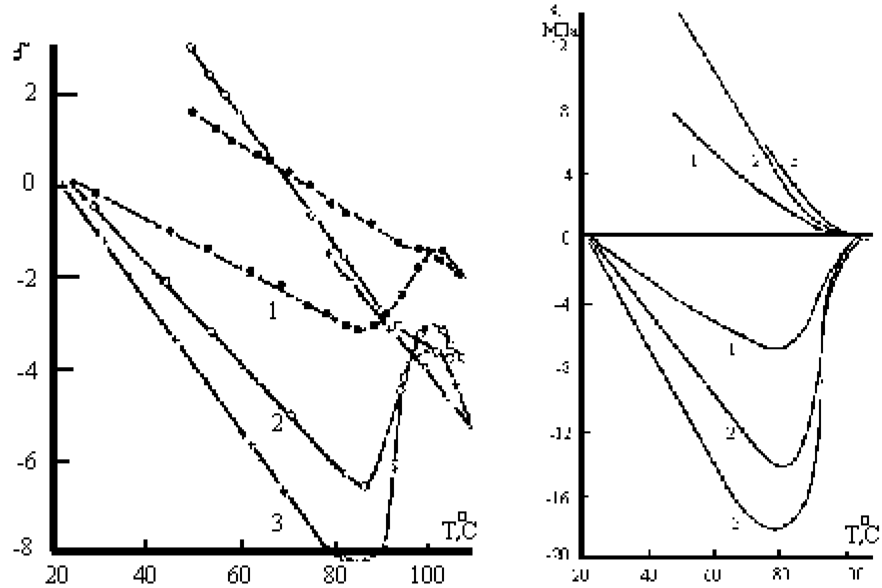


Рис. 3. Кинетика двупреломления и напряжений в моделях 1-3

Связь исходных задач о составных телах с задачей о защемлённом стержне. Если ввести скалярную функцию времени

$$\sigma(t) = \mathbf{E}_{\xi}\upsilon, \tag{8}$$

имеющую размерность напряжения, то она зависит от реологии материала, разности тепловых деформаций $\upsilon = \upsilon(T)$ и изменения температуры $T = T(t)$. Функция $\sigma(t)$ есть напряжение в полимерном стержне с жестко защемленными концами (рис.2.модель 1). Предполагается, что программы нагревания и охлаждения стержня те же, что и в задачах для моделей 2,3.

Вследствие линейности систем решение краевой задачи в напряжениях имеет вид

$$\sigma_{ij}(x, t) = a_{ij}^{\xi}\, \sigma(t), \tag{9}$$

где a_{ij}^{ξ} - компоненты безразмерного симметричного двухвалентного тензора, которые зависят от геометрии задачи (формы тела, размеров и положения поверхности), от координат точек тела x_i. Заметим, что аналитические функции операторов Вольтерра сами являются операторами Вольтерра.

Таким образом, применение интегральных уравнений Вольтерра позволило установить соотношения ((9), которое значительно упростило решение задач о составных телах [6]. На основе анализа уравнений наследственного типа и особенностей поведения реальных полимерных материалов в неизотермических условиях, построены приближенные уравнения термовязкоупругости и фототермовязкоупругости для случаев монотонных изменений температуры, позволяющие упростить решения температурных задач и обработку экспериментальных данных.

Результаты исследований опубликованы в монографиях и работах коллег [4-7].

Отметим, что теоретические и экспериментальные исследования были продолжены для материалов с нелинейными свойствами с учётом зависимости приведенного времени (3) от напряжений [5, 7].

Благодарности: Автор благодарит всех сотрудников лаборатории оптического метода НИИММ им. акад. В.И. Смирнова и Вычислительного центра за помощь в работе. Особо хочется вспомнить сотрудников лаборатории зав.лаб. ст.н.с. С.П. Шихобалова, ст.н.с. Е.И. Эдельштейна. Большую помощь в работе оказали ст.н.с. Т.Д. Максутова, инженеры А.Н. Спецаков, Н.И. Александрова и А.А. Уткин.

Список литературы

1. Полищук Е.М. Вито Вольтерра. Изд. Наука. Ленинградское отд. Ленинград. 1977. 114с.
2. Демидова И.И. Развитие метода фотоупругости. Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. Серия «Педагогика» (История и теория математического образования). Елец. 2016. С. 54-59
3. Екельчик В.С., Демидова И.И. Об описании реологии полимеров с помощью сумм дробно-экспоненциальных функций. Сб. «Исследования по упругости и пластичности" Изд. ЛГУ, 1978. №12. 25-30 с.
4. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М. Наука 1973 г. 288 с
5. Бугаков И.И. Фотоползучесть. М.: Наука. 1991. 165 с
6. Бугаков И.И., Демидова И.И. Метод фототермовязкоупругости. СПб. 1993.166 с.
7. Федоровский Г.Д. Деформирование реологически сложных полимерных сред : автореферат дисс. кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербург, 1998. 15 с

HISTORY OF APPLICATION OF VOLTERRA' INTEGRAL EQUATIONS IN LENINGRAD UNIVERSITY

I. Demidova
Cand. Sci. (Phys.–Math.), senior researcher
maria_ib@mail.ru
Saint Petersburg

Sankt Petersburg University

Abstract. History of the application of the Volterra'integral equations for the description of the features of the behaviors of a real polymer materials under the non-isothermal conditions and for the decision of the problems for the thermoviscoelasticity and photothermoviscoelasticity.

Keywords: Volterra'integral equations, generalized curves, thermoviscoelasticity, photothermoviscoelasticity

References

1. Polishuk E. Vito Volterra. "Nauka". Leningrad. 1977. 114p.
2. Demidova I. Development of method photoelsticity. Vestnic of Elets university by name I. Bunin. Elets. 2016. P. 54-59
3. Ekelchik V., Demidova I. About description of polymer rheology by summe of fractional exponential functions. Proceedings "Elastic and plastic Investigations". Leningrad. 1978. N 12. 25-30 p.
4. Bugakov I. Creep of polymer materials. Moscow. Nauka. 1973. 288 p.
5. Bugakov I. Photocreeps. Moscow. Nauka. 1991. 165 p.
6. Bugakov I., Demidova I. Photothermoviscoelasticity method. Saint Petersburg. 1993. 166 p.
7. Fedorovskii G. Deformation of rheology complex polymer media. Autoabstract of dissertation for kandidat (phd) on physical-mathematicals sciences. Saint Petersburg. 1998.15 c.

УДК 378.02

РЕАЛИЗАЦИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Виталий Викторович Богун
к.п.н., доцент
vvvital@mail.ru
г. Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Аннотация. В настоящее время при организации процесса обучения математике в вузах применяются различные виды информационно-коммуникационных технологий для автоматизации процессов выполнения расчетных алгоритмов различной степени сложности с наглядным представлением зависимостей между варьируемыми значениями параметров исходных данных, промежуточных и итоговых результатов вычислений. В данной статье показана реализация тригонометрического анализа равнобедренных треугольников на плоскости с применением разработанного автором программного обеспечения для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях для наглядного представления необходимой входной и выходной информации. Основной целью применения представленных программ является автоматизация процесса поиска пропорциональных зависимостей между линейными элементами и визуализации совпадающих компонентов для одного или двух взаимосвязанных равнобедренных треугольников на плоскости на основе реализации тригонометрического анализа угловых параметров треугольников. В данном случае применение информационно-коммуникационных технологий позволяет автоматизировать процесс многократного перебора большого количества вариантов зависимостей между отношениями линейных элементов в численном виде для отбора только пропорциональных соотношений, достоверность которых в свою очередь можно доказать аналитическим путем. Таким образом, благодаря компьютерной реализации соответствующих расчетных алгоритмов можно придти к получению новых закономерностей и формулировке теорем, которые уже в минимальном количестве подвергаются доказательству привычным математическим аппаратом. Реализация студентами вузов тригонометрического анализа равнобедренных треугольников с применением разработанного автором программного обеспечения позволяет учащимся наглядно продемонстрировать интеграцию между математикой и информатикой и способствует формированию у обучаемых необходимых образовательных компетенций в через призму нахождения зависимостей между значениями линейных и угловых параметров объектов на основе варьирования значений исходных данных.

Ключевые слова: тригонометрический анализ, равнобедренные треугольники, информационно-коммуникационные технологии, образовательные компетенции, интеграция математики и информатики.

Для развития у студентов вузов необходимого уровня теоретических знаний, практических умений, навыков и способностей, формирующих в совокупности у обучаемых определенные образовательные компетенции, необходимо помимо изучения стандартных объектов, рассматриваемых в рамках учебных дисциплин естественнонаучного цикла, целесообразно широко применять фрагменты научно-исследовательской деятельности, направленной, во-первых, на расширение образовательной базы учащихся, а, во-вторых, на адаптацию обучаемых к комплексному применению полученной студентами предметной базы для решения сложных задач, направленных на исследование реальных процессов и явлений.

Тригонометрический анализ равнобедренных треугольников на плоскости подразумевает применение различных видов информационных технологий (графического калькулятора, персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях) для реализации численных расчетов, суть которых заключается в нахождении и визуализации необходимых параметров рассматриваемых геометрических фигур на основе применения тригонометрических отношений для характерных углов. При реализации тригонометрического анализа исследуемых фигур необходимо соблюдать сформулированные Е.И. Смирновым [1-2] принципы наглядного моделирования математических объектов и фундирования математических и информационных знаний [3-4].

Принцип наглядного моделирования в данном случае подразумевает применение интеграционных взаимосвязей между информационными знаниями (разработанное программное обеспечение для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях) и математическими знаниями, которые являются гибридом из элементарной геометрии и тригонометрии, для нахождения необходимых отношений между линейными элементами рассматриваемых геометрических фигур, особенно при реализации оптимизационных поисков пропорциональных зависимостей между данными элементами, с последующей наглядной визуализацией геометрических фигур. Необходимо отметить, что при рассмотрении двух равнобедренных треугольников пропорциональные зависимости между линейными элементами треугольников позволяют определять совпадающие характерные точки для данных геометрических фигур.

Принцип фундирования математических и информационных знаний состоит в поэтапном развертывания теоретических, процедурных и компетентностных структур. В данном случае принцип фундирования заключается в реализации иерархических логических математических структур с последовательным переходом от рассмотрения элементарных математических понятий и объектов к более сложным алгоритмическим структурам, являющихся интеграционными компонентами элементарной геометрии и тригонометрии.

Спираль фундирования математических знаний в данном случае представляет собой последовательное усложнение реализации и визуализации определенных математических расчетов от одного равнобедренного треугольника (используются тригонометрические функции угла при основании одного равнобедренного треугольника) к двум равнобедренным треугольникам, для которых угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго (применяются тригонометрические функции углов при основаниях двух рассматриваемых равнобедренных треугольников). Каждый уровень спирали фундирования для рассматриваемых фигур, представленный на рис. 2 ниже, включает следующие этапы при реализации и визуализации необходимых расчетов на основе получаемых значений исходных данных (определение значений тригонометрических функций основных углов фигур; нахождение отношений между линейными элементами фигур; выявление целочисленных отношений между линейными элементами фигур; нахождение пропорциональных зависимостей между линейными элементами фигур; определение значений линейных элементов фигур; нахождение значений координат характерных точек фигур; выявление совпадающих характерных точек фигур и определение значений координат данных точек; визуальное отображение геометрических фигур).

Необходимо отметить, что каждый новый виток спирали фундирования подразумевает реализацию указанных в спирали этапов на новом уровне математических структур, базирующихся на знаниях предыдущих структур, определяя глобальную спираль фундирования, что полностью соответствует логике последовательного рассмотрения в монографии геометрических фигур [5, 6].

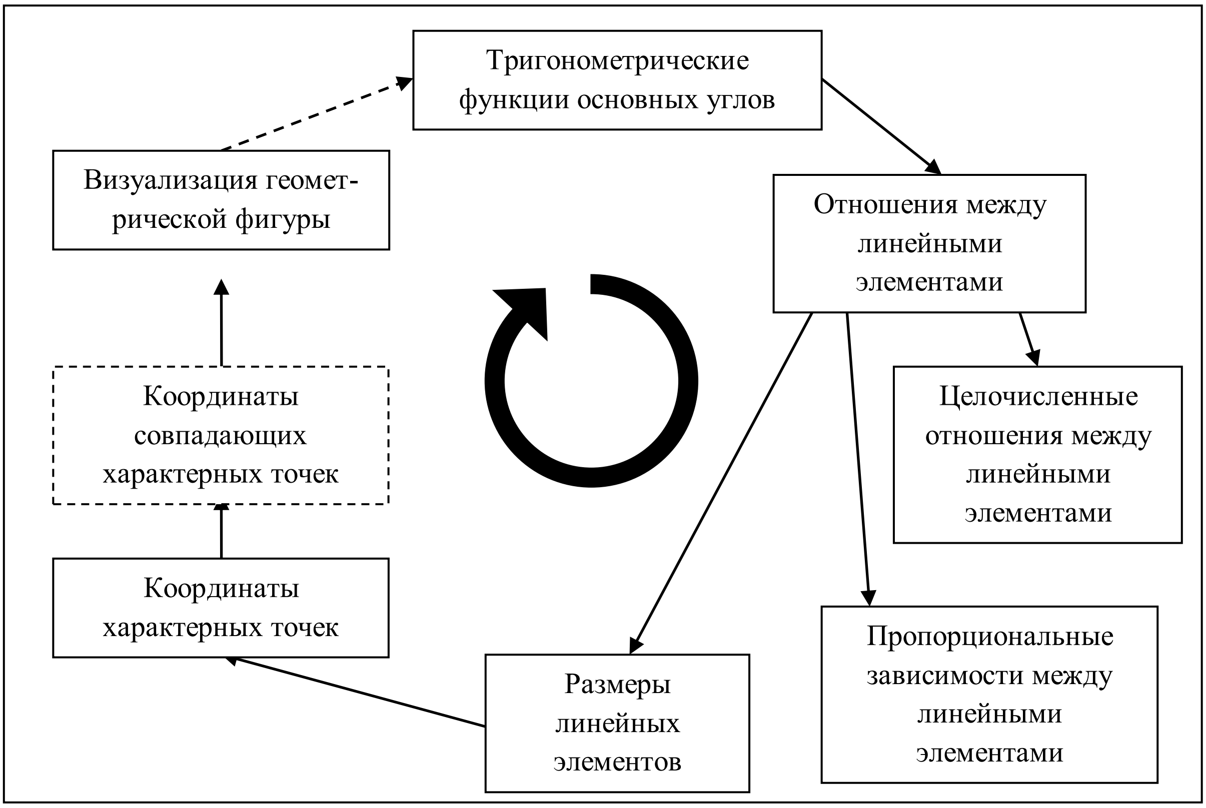


Рис. 1. Спираль фундирования при реализации тригонометрического анализа одного или двух взаимосвязанных равнобедренных треугольников на плоскости.

Рассмотрим результаты реализации тригонометрического анализа одного равнобедренного треугольника на плоскости с применением разработанного автором программного обеспечения для различных видов средств информационно-коммуникационных технологий [7-8]. Для представленного на рис. 2 произвольного равнобедренного треугольника ΔABC, в котором $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ – углы при основании треугольника, существуют следующие пропорциональные зависимости между его линейными элементами:

Отношение основной высоты к половине основания равно отношению половины основания к разности между диаметром описанной окружности и основной высотой (квадрат половины основания равен произведению основной высоты и разности между диаметром описанной окружности и основной высотой):

$$\frac{h}{a} = \frac{a}{D-h} \quad \left(a^2 = h \cdot (D-h)\right);$$

Отношение основной высоты к боковой стороне равно отношению боковой стороны к диаметру описанной окружности (квадрат боковой стороны равен произведению основной высоты и диаметра описанной окружности):

$$\frac{h}{b}=\frac{b}{D}\ \left(b^2=h\cdot D\right);$$

Отношение половины основания к боковой стороне равно отношению радиуса вписанной окружности к разности между основной высотой и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{a}{b}=\frac{r}{h-r};$$

Отношение радиуса вписанной окружности к разности между основной высотой и диаметром вписанной окружности равно отношению разности между диаметром описанной окружности и основной высотой к радиусу вписанной окружности (квадрат радиуса вписанной окружности равен произведению разности между основной высотой и диаметром вписанной окружности и разности между диаметром описанной окружности и основной высотой):

$$\frac{r}{h-d}=\frac{D-h}{r}\ \left(r^2=(h-d)\cdot(D-h)\right);$$

Отношение разности между основной высотой и радиусом вписанной окружности к разности между основной высотой и диаметром вписанной окружности равно отношению диаметра описанной окружности к разности между основной высотой и радиусом вписанной окружности (квадрат разности между основной высотой и радиусом вписанной окружности равно произведению разности между основной высотой и диаметром вписанной окружности и диаметра описанной окружности):

$$\frac{h-r}{h-d}=\frac{D}{h-r}\ \left((h-r)^2=(h-d)\cdot D\right).$$

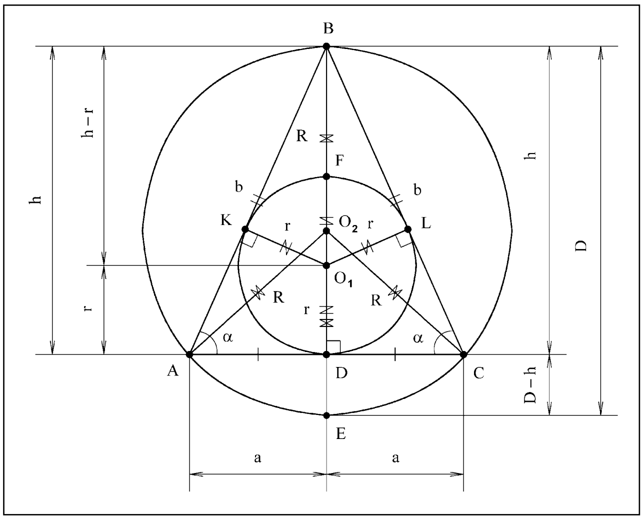


Рис. 2. Произвольный равнобедренный треугольник на плоскости
с обозначениями линейных и угловых элементов

Взаимосвязь между вписанной и описанной окружностями равнобедренного треугольника отражается в виде утверждения о том, что отношение разности между диаметром описанной вокруг равнобедренного треугольника окружности и основной высотой к диаметру описанной окружности равно квадрату отношения радиуса вписанной в треугольник окружности к разности между основной высотой и радиусом вписанной окружности и равно квадрату косинуса угла при основании равнобедренного треугольника:

$$\frac{D-h}{D}=\left(\frac{r}{h-r}\right)^{2}=cos^{2}\,\alpha\,.$$

С точки зрения реализации тригонометрического анализа одного равнобедренного треугольника на плоскости применительно к различным видам информационно-коммуникационных технологий можно представить наглядную форму для указания значений параметров исходных данных и функциональных опций в рамках динамической Интернет-страницы (рис. 3).

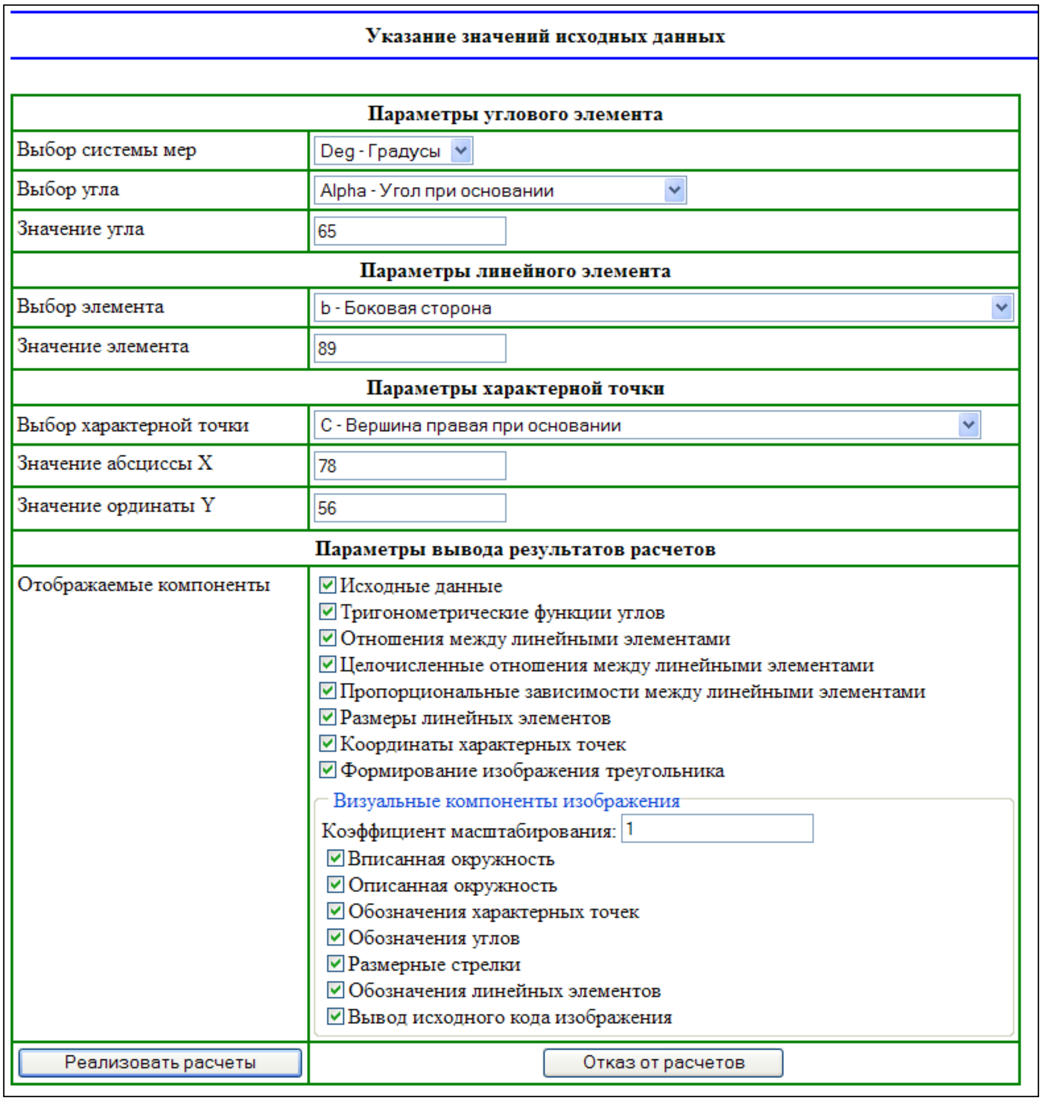


Рис. 3. Форма указания параметров значений исходных данных и визуализации для программы в рамках динамической Интернет-страницы

На рис. 4 представлены сформулированные в виде таблицы получаемые в результате обработки поискового алгоритма пропорциональные зависимости между линейными параметрами исследуемого равнобедренного треугольника на плоскости, наглядно представленного на рис. 5.

Пропорциональные зависимости между линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании Alpha = 65°

№	Выражение	Числовые эквиваленты
1	h/a = a/(D-h)	2.1445 = 2.1445
2	h/b = b/D	0.9063 = 0.9063
3	a/b = r/(h-r)	0.4226 = 0.4226
4	r/(h-d) = (D-h)/r	0.7320 = 0.7320
5	(h-r)/(h-d) = D/(h-r)	1.7320 = 1.7320

Рис. 4. Вывод пропорциональных зависимостей между линейными элементами равнобедренного треугольника на плоскости

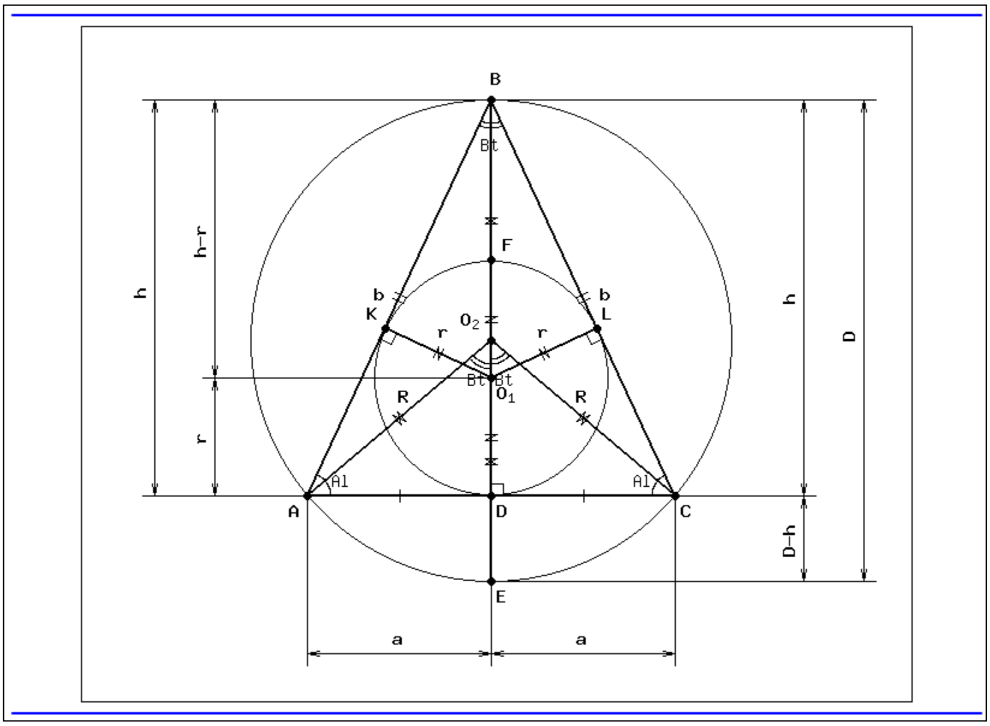


Рис. 5. Визуальный вывод исследуемого равнобедренного треугольника на плоскости

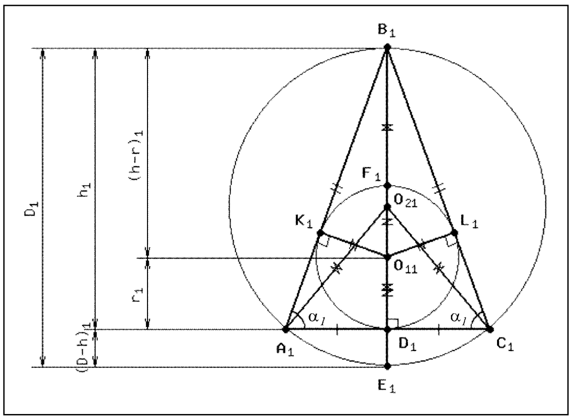
Представим результаты реализации тригонометрического анализа двух равнобедренных треугольников на плоскости при наличии условия, что угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго, то есть $\beta_2 = \alpha_1$ или $\alpha_2 = \dfrac{\pi - \alpha_1}{2}$, с применением разработанного автором программного обеспечения для различных видов средств информационно-коммуникационных технологий.

Для представленных на рис. 6 равнобедренных треугольников $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ ($\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = \alpha_1 = \angle A_2B_2C_2 = \beta_2$ $\left(\angle B_2A_2C_2 = \angle B_2C_2A_2 = \alpha_2\right)$ – углы при основании треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ $\left(\Delta A_2B_2C_2\right)$, существуют следующие пропорциональные зависимости между их взаимными линейными элементами:

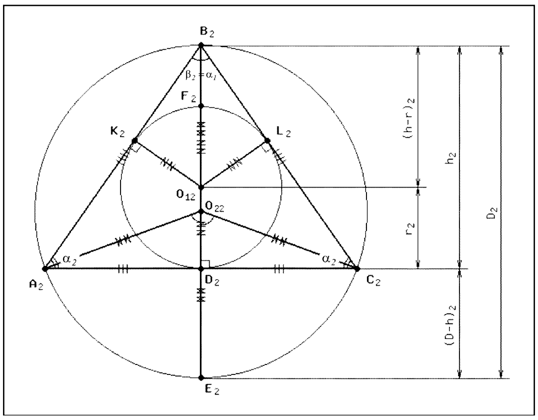
– Отношение основной высоты второго треугольника к основной высоте первого треугольника равно отношению радиуса описанной вокруг второго треугольника окружности к разности между основной высотой первого треугольника и радиусом вписанной в него окружности и равно отношению разности между основной высотой второго треугольника и радиусом описанной вокруг него окружности к радиусу вписанной в первый треугольник окружности, а также равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к разности между основной высотой первого треугольника и диаметром вписанной в него окружности:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{R_2}{(h-r)_1} = \frac{(h-R)_2}{r_1} = \frac{(D-h)_2}{(h-d)_1};$$

– Отношение основной высоты второго треугольника к половине основания первого треугольника равно отношению половины основания второго треугольника к радиусу вписанной в первый треугольник окружности: $\frac{h_2}{a_1} = \frac{a_2}{r_1}$;



Треугольник $\Delta A_1B_1C_1$



Треугольник $\Delta A_2B_2C_2$

Рис. 6. Равнобедренные треугольники $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$
с обозначениями линейных и угловых элементов

– Отношение основной высоты второго треугольника к боковой стороне первого треугольника равно отношению половины основания второго треугольника к разности между основной высотой первого треугольника и радиусом вписанной в него окружности: $\frac{h_2}{b_1} = \frac{a_2}{(h-r)_1}$;

– Отношение половины основания второго треугольника к основной высоте первого треугольника равно отношению радиуса описанной вокруг второго треугольника окружности к боковой стороне первого треугольника и равно отношению разности между основной высотой второго треугольника и радиусом описанной вокруг него окружности к половине основания первого треугольника:

$$\frac{a_2}{h_1} = \frac{R_2}{b_1} = \frac{(h-R)_2}{a_1};$$

– Отношение половины основания второго треугольника к половине основания первого треугольника равно отношению разности между основной высотой второго треугольника и радиусом описанной вокруг него окружности к разности между диаметром описанной вокруг первого треугольника окружности и его основной высотой и равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к радиусу вписанной в первый треугольник окружности:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(h-R)_2}{(D-h)_1} = \frac{(D-h)_2}{r_1};$$

– Отношение половины основания второго треугольника к боковой стороне первого треугольника равно отношению радиуса описанной вокруг второго треугольника окружности к диаметру описанной вокруг первого треугольника окружности и равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к разности между основной высотой первого треугольника и радиусом вписанной в него окружности:

$$\frac{a_2}{b_1} = \frac{R_2}{D_1} = \frac{(D-h)_2}{(h-r)_1}.$$

На основании полученных пропорциональных зависимостей между линейными элементами исследуемых равнобедренных треугольников можно получить следующие теоремы, суть которых состоит в раскрытии интересных фактов о геометрических особенностях визуального построения данных треугольников при условии совпадения определенных линейных элементов треугольников, в том числе с точки зрения взаимосвязи между вписанными и описанными окружностями исходных равнобедренных треугольников.

Теорема 1 («О двух равнобедренных треугольниках, построенных на общей основной высоте»): Если для двух равнобедренных треугольников угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго треугольника и они построены на общей основной высоте, то центр вписанной в первый треугольник окружности совпадает с центром описанной вокруг второго треугольника окружности (рис. 7).

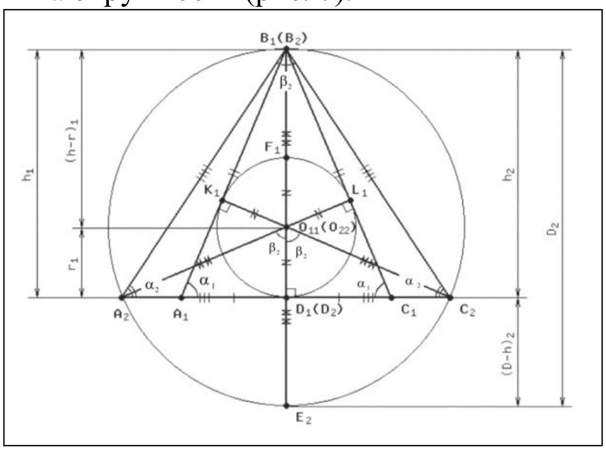


Рис. 7. Геометрическая интерпретация теоремы 1

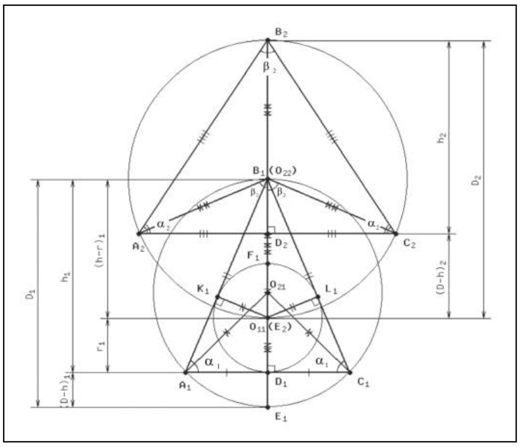


Рис. 8. Геометрическая интерпретация теоремы 2

Теорема 2: Если для двух равнобедренных треугольников угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго треугольника и отрезок, отражающий разность между основной высотой и радиусом вписанной окружности для первого треугольника, совпадает с радиусом описанной вокруг второго треугольника окружности, то описанная вокруг первого треугольника окружность проходит через центр описанной второго треугольника окружности, равно как описанная вокруг второго треугольника окружность проходит через центр вписанной в первый треугольник окружности (рис. 8).

Теорема 3: Если для двух равнобедренных треугольников угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго треугольника и основная высота первого треугольника совпадает с половиной основания второго треугольника, то вершина при основании и боковая сторона первого треугольника совпадают соответственно с центром и радиусом описанной вокруг второго треугольника окружности, половина основания первого треугольника совпадает с отрезком, отражающим разность между основной высотой и радиусом описанной окружности второго треугольника, при этом описанная вокруг первого треугольника окружность проходит через центр описанной окружности и вершину при основании второго треугольника (рис. 9).

Теорема 4 («О двух равнобедренных треугольниках, построенных на общем основании»): Если для двух равнобедренных треугольников угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго треугольника и они построены на общем основании, то описанная вокруг первого треугольника окружность проходит через центр описанной вокруг второго треугольника окружности, которая, в свою очередь, проходит через центр вписанной в первый треугольник окружности (рис. 10).

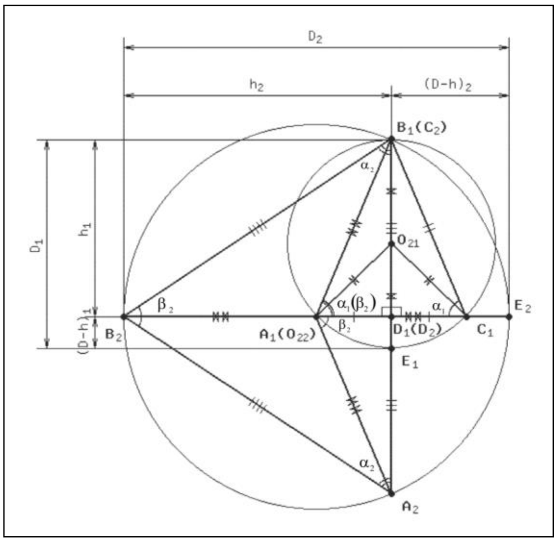


Рис. 9. Геометрическая интерпретация теоремы 3

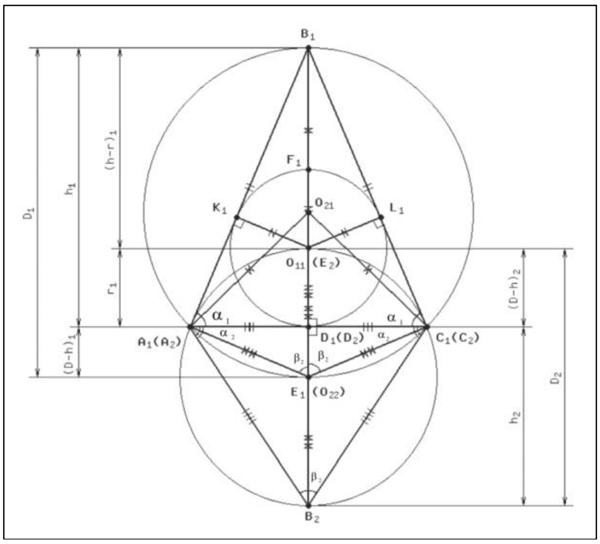
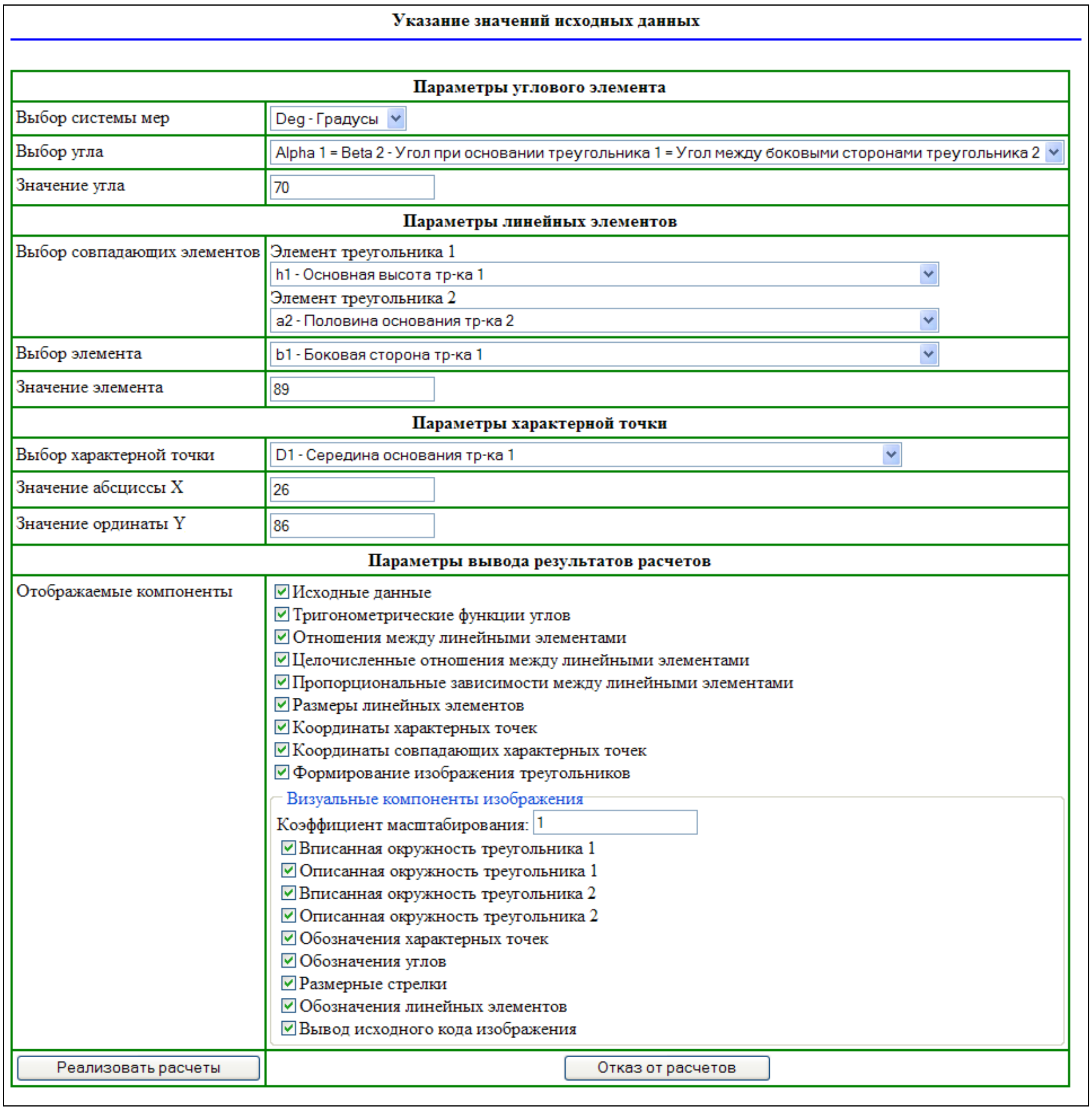


Рис. 10. Геометрическая интерпретация теоремы 4

С точки зрения реализации тригонометрического анализа двух равнобедренных треугольников на плоскости, угол при основании одного из которых равен углу между боковыми сторонами второго применительно к различным видам информационно-коммуникационных технологий можно представить наглядную форму для указания значений параметров исходных данных и функциональных опций в рамках динамической Интернет-страницы (рис. 11).



Указание значений исходных данных

Параметры углового элемента	
Выбор системы мер	Deg - Градусы
Выбор угла	Alpha 1 = Beta 2 - Угол при основании треугольника 1 = Угол между боковыми сторонами треугольника 2
Значение угла	70
Параметры линейных элементов	
Выбор совпадающих элементов	Элемент треугольника 1 h1 - Основная высота тр-ка 1 Элемент треугольника 2 a2 - Половина основания тр-ка 2
Выбор элемента	b1 - Боковая сторона тр-ка 1
Значение элемента	89
Параметры характерной точки	
Выбор характерной точки	D1 - Середина основания тр-ка 1
Значение абсциссы X	26
Значение ординаты Y	86
Параметры вывода результатов расчетов	
Отображаемые компоненты	Исходные данные Тригонометрические функции углов Отношения между линейными элементами Целочисленные отношения между линейными элементами Пропорциональные зависимости между линейными элементами Размеры линейных элементов Координаты характерных точек Координаты совпадающих характерных точек Формирование изображения треугольников Визуальные компоненты изображения Коэффициент масштабирования: 1 Вписанная окружность треугольника 1 Описанная окружность треугольника 1 Вписанная окружность треугольника 2 Описанная окружность треугольника 2 Обозначения характерных точек Обозначения углов Размерные стрелки Обозначения линейных элементов Вывод исходного кода изображения
Реализовать расчеты	Отказ от расчетов

Рис. 11. Форма указания параметров значений исходных данных и визуализации для программы в рамках динамической Интернет-страницы

На рис. 12 представлены сформулированные в виде таблицы получаемые в результате обработки поискового алгоритма пропорциональные зависимости между линейными параметрами исследуемых равнобедренных треугольников на плоскости, наглядно представленных на рис. 6.

Организация тригонометрического анализа равнобедренных треугольников на плоскости в рамках учебного процесса подразумевает исследование студентами вузов одного или двух взаимосвязанных равнобедренных треугольников в рамках проведения аудиторных практических и лабораторных занятий по математике с точки зрения нахождения пропорциональных зависимостей между линейными элементами одного или двух взаимосвязанных указанным условием равнобедренных треугольников, при этом решение необходимых геометрических задач должно реализовываться с применением тригонометрических выражений в рамках интеграционных взаимосвязей между тригонометрией и элементарной геометрией на плоскости [5-8].

Пропорциональные зависимости между линейными элементами двух равнобедренных треугольников с равными углами Alpha 1 = Beta 2 = 70°

№	Выражение	Числовые эквиваленты
1	$h_2/h_1 = R_2/(h\text{-}r)_1$	1.4281 = 1.4281
2	$h_2/h_1 = (h\text{-}R)_2/r_1$	1.4281 = 1.4281
3	$h_2/h_1 = (D\text{-}h)_2/(h\text{-}d)_1$	1.4281 = 1.4281
4	$h_2/a_1 = a_2/r_1$	3.9238 = 3.9238
5	$h_2/b_1 = a_2/(h\text{-}r)_1$	1.3420 = 1.3420
6	$a_2/h_1 = R_2/b_1$	1.0000 = 1.0000
7	$a_2/h_1 = (h\text{-}R)_2/a_1$	1.0000 = 1.0000
8	$a_2/a_1 = (h\text{-}R)_2/(D\text{-}h)_1$	2.7475 = 2.7475
9	$a_2/a_1 = (D\text{-}h)_2/r_1$	2.7475 = 2.7475
10	$a_2/b_1 = R_2/D_1$	0.9397 = 0.9397
11	$a_2/b_1 = (D\text{-}h)_2/(h\text{-}r)_1$	0.9397 = 0.9397
12	$R_2/b_1 = (h\text{-}R)_2/a_1$	1.0000 = 1.0000
13	$R_2/(h\text{-}r)_1 = (h\text{-}R)_2/r_1$	1.4281 = 1.4281
14	$R_2/(h\text{-}r)_1 = (D\text{-}h)_2/(h\text{-}d)_1$	1.4281 = 1.4281
15	$R_2/R_1 = 2(D\text{-}h)_2/(h\text{-}r)_1$	1.8794 = 2*0.9397
16	$(h\text{-}R)_2/r_1 = (D\text{-}h)_2/(h\text{-}d)_1$	1.4281 = 1.4281
17	$(h\text{-}R)_2/(D\text{-}h)_1 = (D\text{-}h)_2/r_1$	2.7475 = 2.7475

Рис. 12. Вывод пропорциональных зависимостей между линейными элементами равнобедренных треугольников на плоскости

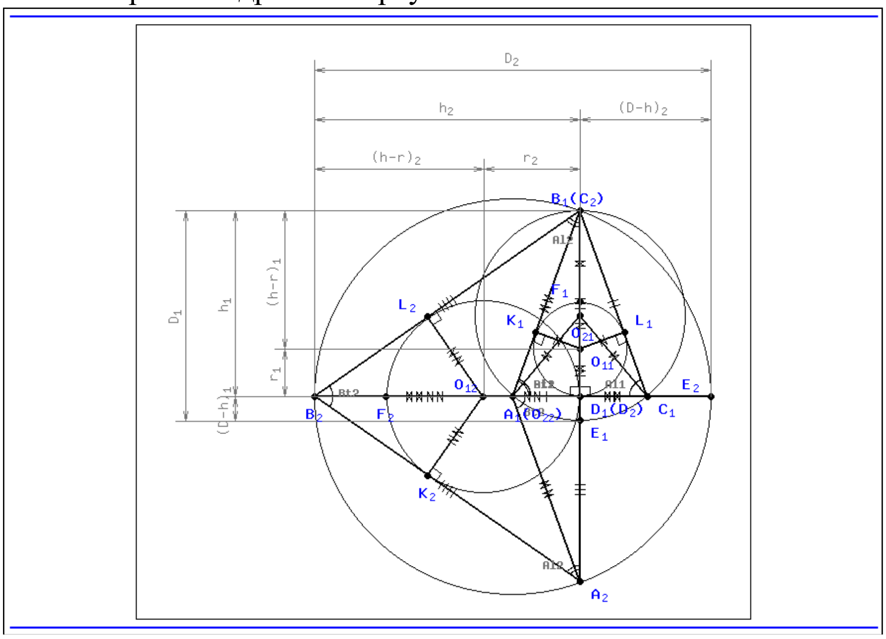


Рис. 13. Визуальный вывод исследуемых равнобедренных треугольников на плоскости

Исследование равнобедренных треугольников на плоскости осуществляется студентами в рамках малых групп учащихся и включает в себя, во-первых, сбор информации из различных источников о равнобедренных треугольниках как геометрических фигурах с описанием их свойств в рамках реализации объектно-ориентированного подхода, во-вторых, построение различных функциональных зависимостей и закономерностей с точки зрения вариативности значений параметров исходных данных и условий реализации функций через призму диалога математической, информационной и гуманитарной культур, и, в-третьих, многократный мониторинг результатов выполненной ранее инновационной деятельности с целью выявления положительной и отрицательной динамики параметров и показателей когнитивной деятельности, изменений в опыте и личностных качествах учащегося через призму диалога математической, информационной и гуманитарной культур.

Таким образом, организация процесса обучения математике студентов вузов при реализации тригонометрического анализа равнобедренных треугольников на плоскости с применением различных информационно-коммуникационных технологий позволяет организовать полноценную научно-исследовательскую деятельность учащихся, направленную на глубокий математический и прикладной анализ математических объектов.

Список литературы

1. Синергия математического образования: Введение в анализ (2016): монография / Е.И. Смирнов, В.В. Богун, А.Д. Уваров. Ярославль, изд-во «Канцлер».
2. Этапы технологического сопровождения процесса самоорганизации в математическом образовании будущего педагога (2017) / Е.И. Смирнов, Н.Е. Смирнов, А.Д. Уваров // Ярославский педагогический вестник, № 3.
3. Синергия гуманитарного и математического знания как педагогическое условие решения междисциплинарных проблем (2017) / С.Н. Дворяткина, А.А. Дякина, С.А. Розанова // Интеграция образования, № 1 (86).
4. Разработка интегративных курсов на основе синергетического подхода при решении профессиональных и прикладных задач (2016) / С.Н. Дворяткина, С.А. Розанова // Ярославский педагогический вестник. Сер. «Психолого-педагогические науки», № 6.
5. Богун В.В. (2013) Тригонометрический анализ равнобедренных треугольников с применением информационных технологий: монография. Ярославль: Изд-во «Канцлер».
6. Богун В.В. (2003) Геометрия древнего Египта: монография. М.: Компания Спутник +.
7. Использование графического калькулятора в обучении математике (2008): учебное пособие / Е.И. Смирнов, В.В. Богун. Ярославль, изд-во ЯГПУ.
8. Богун В.В. (2012) Организация учебного процесса по математике с применением графического калькулятора. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany.

IMPLEMENTATION OF THE TRIGONOMETRICAL ANALYSIS OF ISOSCELES TRIANGLES WITH APPLICATION OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES

V.V. Bogun
Dr. Sci. (Pedagogy), associate professor
vvvital@mail.ru
Yaroslavl

Yaroslavl State Pedagogical University after K.D. Ushinsky

Abstract. Now at the organization of process of training in mathematics in higher education institutions different types of information and communication technologies are applied to process automation of performance of settlement algorithms of various degree of complexity with evident representation of dependences between the varied values of parameters of basic data, the intermediate and final results of calculations. Implementation of the trigonometrical analysis of isosceles triangles on the plane with application of the software developed by the author for the graphic calculator and the personal computer at the local and network levels for evident submission of necessary input and output information is shown in this article. A main objective of application of the presented programs is automation of process of search of proportional dependences between linear elements and visualization of coinciding components for one or two interconnected isosceles triangles on the plane on the basis of implementation of the trigonometrical analysis of angular parameters of triangles. In this case application of information and communication technologies allows to automate process of repeated search of a large number of options of dependences between the relations of linear elements in a numerical look for selection only of proportional ratios which reliability in turn can be proved in the analytical way. Thus, thanks to computer realization of the corresponding settlement algorithms it is possible to come to obtaining new regularities and the wording of theorems which already in the minimum quantity are exposed to the proof a habitual mathematical apparatus. Realization by students of higher education institutions of the trigonometrical analysis of isosceles triangles with application of the software developed by the author allows pupils to show visually integration between mathematics and informatics and promotes formation at the trained necessary educational competences in through a prism of finding of dependences between values of linear and angular parameters of objects on the basis of variation of values of basic data.

Keywords: trigonometrical analysis, isosceles triangles, information and communication technologies, educational competences, integration of mathematics and informatics.

References

1. Synergy of mathematical education: Introduction to the analysis (2016): monograph / E.I. Smirnov, V.V. Bogun, A.D. Uvarov. Yaroslavl, Kantsler publishing house.
2. Stages of technological maintenance of process of self-organization in mathematical education of future teacher (2017) / E.I. Smirnov, N.E. Smirnov, A.D. Uvarov//Yaroslavl pedagogical bulletin, No. 3.
3. Synergy of humanitarian and mathematical knowledge as pedagogical condition of the solution of cross-disciplinary problems (2017) / S.N. Dvoryatkina, A.A. Dyakina, S.A. Rozanova//Integration of education, No. 1 (86).
4. Development of integrative courses on the basis of synergetic approach at the solution of professional and applied tasks (2016) / S.N. Dvoryatkina, S.A. Rozanova // The Yaroslavl pedagogical bulletin. It is gray. Psychology and pedagogical sciences, No. 6.
5. Bogun V.V. (2013) The Trigonometrical analysis of isosceles triangles with use of information technologies: monograph. Yaroslavl: Kantsler publishing house.
6. Bogun V.V. (2003) Geometry of ancient Egypt: monograph. M.: Satellite company.
7. Use of the graphic calculator in training in mathematics (2008): manual / E.I. Smirnov, V.V. Bogun. Yaroslavl, YaGPU publishing house.
8. Bogun V.V. (2012) the Organization of educational process for mathematics with use of the graphic calculator. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany.

УДК 378.147

СТИМУЛИРОВАНИЕ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ОБЛАСТИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ

Елена Вячеславовна Никулина
к.т.н., доцент
anelnik@mail.ru
г. Ярославль
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова.

Елена Николаевна Грибова
к.т.н., ст. преподаватель
lena13_75@mail.ru
г. Ярославль
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова.

Аннотация. Изменения в высшей школе, произошедшие и продолжающие происходить в связи с введением новых государственных образовательных стандартов, сопровождаются пересмотром различных аспектов системы образования (организационных, методических и т.п.). Данные изменения непосредственным образом касаются, в том числе, деятельности преподавателя, как участника образовательного процесса. В современных условиях процесс преподавания учебной дисциплины должен быть направлен на формирование соответствующих компетенций, причём не только профессиональных, но и общепрофессиональных, и универсальных. Это означает, что преподаватель должен пересмотреть все основы методики преподавания конкретной дисциплины, начиная от выявления структуры, этапов формирования и показателей сформированности каждой компетенции и заканчивая разработкой конкретных образовательных технологий. Всё это требует от преподавателя огромной предварительной внеаудиторной работы в условиях неопределённости, когда отсутствуют единые подходы к решению указанных проблем. В статье в рамках компетентностного и деятельностного подходов рассматриваются методы стимулирования учебно-познавательной деятельности студентов классического университета математического факультета в области дополнительного курса по истории математики и факультета социально-политических наук в области непрофильных дисциплин, связанных с ИВТ,. Отмечается тот факт, что профессиональная математическая компетенция необходимо включает в свою структуру мотивационную составляющую (наличие профессиональных потребностей, мотивов, и целей) и практическую (в частности, опыт математической деятельности). При этом стимулирование учебно-познавательной деятельности в области и истории математики и в сфере применения современных информационных технологий рассматривается как одно из направлений развития профессиональных математических компетенций и может быть использовано не только в рамках этих дисциплин, но и более широко - на протяжении всего процесса обучения в вузе.

Ключевые слова: компетентностный подход, математический факультет, факультет социально-политических наук, история математики, информационные технологии, методы стимулирования учебно-познавательной деятельности, математическая компетенция.

Введение. Современные реалии таковы, что выпускникам вузов приходится осуществлять свою профессиональную деятельность в условиях очень быстрого роста объёма информации, смены жизненной ситуации, общемировой интеграции, и, как следствие, непрерывно повышать свою квалификацию или менять сферу деятельности. Учитывая это, в последние годы изменились не только сами принципы преподавания в вузе, но и отношение к обучению как со стороны студентов так и со стороны преподавателей. На первый план вышел компетентностный подход в образовании.

Методология. Компетентностный подход разрабатывается в трудах многих современных российских учёных (И.А. Зимняя, Н.П. Меньшиков, Д.А. Иванов, В.И. Байденко, Б. Оскарсон, С.Е. Шишов, А.К. Маркова, А.Ф. Хуторской). На данный момент существуют различные подходы к его определению, а также к определению входящих в него базовых понятий, таких как «компетенция», «компетентность». Но все их объединяет тот факт, что на современном этапе результат образования, в частности, в высшей школе, уже не может сводиться к наличию лишь только «знаниевых» и личностных характеристик у выпускника, а предполагает и достижение учащимися определённого уровня развития способностей и готовностей к соответствующим видам деятельности.

Компетентностный подход призван сформировать профессионально-мобильную личность, безболезненно и быстро вливающуюся после обучения в сферу своей профессиональной деятельности, готовую к её смене. Это попытка привести в соответствие массовую школу и потребности рынка труда, подход, акцентирующий внимание на результате образования, причём в качестве результата рассматривается не сумма усвоенной информации, а способность человека действовать в различных ситуациях [1].

Содержание результата образования при компетентностном подходе раскрывается с помощью понятия «компетенции» и «профессиональные компетенции». Далее коротко – математические компетенции, поскольку речь пойдёт о профессиональных компетенциях, формирующихся в результате подготовки по направлению «Математика и компьютерные науки». Под ними понимаем интегративные личностно-профессиональные характеристики выпускника, отражающие его способность и готовность применять математические методы в профессиональной и повседневной деятельности [2]. Но, несмотря на то, что на первый план выходит компетентностный подход, мы его рассматриваем в тесной интеграции с деятельностным, поскольку «…усвоение содержания обучения и непосредственное развитие обучающегося происходят только в процессе собственной учебной деятельности…» [3]. Таким образом, одним из объектов пристального внимания и изучения становится учебно-познавательная деятельность учащегося, как самостоятельная, так и осуществляемая под руководством преподавателя, но в рамках общего компетентностного подхода.

Процесс учебно-познавательной деятельности подробно изучен в педагогике (Н.А. Дороднева, Г.И. Щукина, Э.А. Красновский). Тем не менее, содержание данного понятия имеет свои особенности, когда оно рассматривается применительно к обучению в высшей школе. Учебно-познавательная деятельность студента – целенаправленное, управляемое извне или самостоятельно организованное взаимодействие с окружающей действительностью, направленное на решение учебных задач, формирующее познавательное и эмоционально-ценностное отношение к этой действительности, учебному предмету и будущей профессиональной деятельности [4]. Роль преподавателя при этом может быть как активной, так и пассивной. Активность проявляется, в том числе, в стимулировании учебно-познавательной деятельности учащихся на разных её этапах.

Особенно важно показать студентам полезность и значимость непрофильных дисциплин, предполагающих иной стиль и форму преподавания, нежели привычные им предметы выбранного направления. Необходимо мотивировать их интерес к таким предметам, тем более, если они предлагаются учащимся на начальных курсах.

Далее речь пойдёт о методах стимулирования учебно-познавательной деятельности, используемых на занятиях по истории математики со студентами, будущими математиками, на математическом факультете классического университета и по информатике и информационным технологиям со студентами, будущими социологами, на факультете социально-политических наук классического университета. Эти дисциплины относится к числу математических и естественно-научных дисциплин.

Теоретической базой является классификация указанных методов, разработанная С.А. Смирновым [5]. Студенты готовятся к профессиональной деятельности, которая включает в свою структуру, согласно А.Н. Леонтьеву, мотивационную составляющую (потребности, мотивы, цели) и оперативно-техническую (действия, операции). Готовность к ней – основа математической компетенции. Таким образом, математическая компетенция необходимо должна включать в свою структуру мотивационную составляющую и практическую, подразумевающую опыт математической деятельности.

На наш взгляд, для успешного формирования и развития математической компетенции в вузе необходимо, чтобы учебно-познавательная деятельность, организованная преподавателем, представляла собой модель будущей профессиональной деятельности выпускников. И чем старше становятся ученики, тем более она должна соответствовать их будущей профессиональной деятельности. В классическом университете одним из средств достижения этого может являться введение так называемых интеграционных курсов, объединяющих в себе различные разделы математики и имеющих выход на практику, в том числе, например, на научно-исследовательскую работу. Примерами таких курсов могут служить: теория изображений, история математики, теория массового обслуживания, информационные технологии. Кроме этого, в последние годы возросла степень интеграции высшего образования, науки и наукоёмкого производства. Она предусматривает соединение процесса обучения с научной и/или производственной активностью, и является важнейшей формой адаптации специалиста к условиям дальнейшей профессиональной деятельности [6].

Результаты. На математическом факультете ЯрГУ им. П.Г. Демидова читаются следующие дисциплины по истории математики: «История математики» и «История и методология математики». Первый курс изучается в третьем семестре студентами, будущими бакалаврами по направлению «02.03.01 Математика и компьютерные науки». Он относится к дисциплинам по выбору. Второй курс изучается в первом семестре магистратуры по направлению подготовки «02.04.01 Математика и компьютерные науки», и является базовым.

Основная трудность, с которой сталкивается преподаватель в процессе обучения студентов, будущих математиков, связана, прежде всего, с несерьезным отношением обучающихся именно к исторической части указанных курсов, считая историю лежащей вне зоны своих профессиональных интересов. Таким образом, особую важность приобретает проблема стимулирования учебно-познавательной деятельности студентов в области истории математики с учетом особенностей процесса обучения в вузе. Другая сложность проявляется, в большей степени, при обучении студентов второго курса, и связана она с тем, что им не хватает математических знаний для понимания многих исторических проблем развития математики.

Указанные сложности во многом определяют выбор преподавателем методов стимулирования учебно-познавательной деятельности в области исторических вопросов и проблем математики.

- Метод эмоционального стимулирования. Он реализуется в том числе в процессе знакомства с интересными фактами из жизни ученых и из истории открытий, направлен, прежде всего, на формирование потребностно-мотивационной сферы личности. Упор делается на занимательность информации, вызывающей удивление у студентов, окрашивая эмоционально сухие математические факты. Здесь основная активная роль, как правило, отводится преподавателю, но используются также и интерактивные методы. Например, творческая работа по вычислению среднего возраста ученых-математиков в тот или иной исторический период, в котором ими были сделаны первые значимые открытия, обсуждение результатов. Поскольку он близок к возрасту обучающихся студентов, это создает у них ощущение реальности собственных значимых достижений в будущей профессиональной деятельности. Вторая творческая работа «Улицы Ярославля, названные в честь великих математиков», способствует формированию интереса к вопросу взаимосвязи математики и повседневной жизни, а также пониманию важности математических открытий для человеческого общества.

- Методы развития познавательного интереса и формирования опыта математической деятельности. Сюда относится, например, формирование готовности к восприятию материала. Перед каждым разделом преподаватель актуализирует соответствующие имеющиеся знания у студентов. Этот метод особенно актуален для студентов второго курса. Другим методом является формирование осознания значимости знакомства с основными историческими вехами математики для будущей профессиональной деятельности. Целостное понимание этого во многом удается достигнуть только у студентов-магистрантов к концу изучения ими курса «История и методология математики». Оно позволяет, что называется, посмотреть на процесс развития математической науки «сверху», увидеть перспективы её развития и осознать своё место как профессионала в будущем. Исторический процесс развития математического знания является благотворной почвой для использования и еще одного метода – проблемной ситуации в разрешении исторических математических проблем. Студенты знакомятся с кризисами в развитии математики и обсуждают на семинарских занятиях найденные учеными пути выхода из них.

- Методы формирования ответственности и обязательности. К таким методам относятся, прежде всего, применяемые различные виды контроля за успеваемостью у студентов. Это самостоятельные работы, цель которых – выяснить, насколько учащиеся усвоили основные понятия и методы, используемые математиками на той или иной географической территории в тот или иной исторический период, а также система докладов. К последним применяются определенные требования: ограничение по времени (не более 10 минут), обязательная математическая составляющая, изложение в собственном пересказе, умение ответить на вопросы слушателей. Уровень выполнения данных требований определяет выставляемую преподавателем отметку. Подготовка хотя бы одного доклада является необходимым условием для получения итогового зачета.

- Методы развития творческих способностей учащихся. При выставлении зачёта учитываются также отметки, полученные в течение семестра за самостоятельные работы, и отметка, поставленная за итоговый реферат. Последний пишется на протяжении всего курса и сдаётся на предпоследнем занятии. Он выступает как самостоятельное творческое задание, направленное, прежде всего, на развитие творческих способностей учащихся. Заметим, что использование системы докладов и рефератов позволяет не только оценить уровень подготовки студента, но и взаимодействовать с ним индивидуально, что расширяет возможности для применения указанных в статье методов.

На факультете социально-политических наук ЯрГУ им. П.Г. Демидова преподавателями кафедры теоретической информатики читаются следующие дисциплины: «Информатика», «Пакет программ Microsoft Office», и «Информационные технологии в социальных науках». Информатика изучается на втором курсе студентами, будущими бакалаврами, всех направлений; ПП Microsoft Office - на третьем курсе по направлению «39.03.02 Социальная работа»; ИТ в социальных науках – на втором курсе по направлению «39.03.01 Социология политики и международных отношений». Эти курсы относятся к базовой части ОП бакалавриата.

Основная трудность, с которой сталкивается преподаватель в процессе обучения студентов, будущих социологов, связана так же с несерьезным отношением к математическим, в частности, и абстрактным дисциплинам, в целом, считая решение математических и технических задач вне зоны своих профессиональных интересов. Кроме того, комфортное и эффективное обучение ИТ дисциплинам напрямую связано с удобством и уровнем компьютерного и программного обеспечения. В последнее время версии ОС и офисного ПО часто обновляются, вследствие чего, как правило, происходит несовпадение с привычными версиями, установленными на домашних ПК студентов. Это психологически отталкивает ребят от посещения занятий, отдавая предпочтение выполнению заданий дома.

Таким образом, особую важность приобретает проблема стимулирования учебно-познавательной деятельности студентов в области информатики и преодоления барьера, связанного со страхом работы на иных версиях ПО или с непривычном интерфейсом с учетом особенностей процесса обучения в вузе.

Чтобы преодолеть указанные препятствия к эффективному освоению дисциплин преподавателю необходимо использовать в учебном процессе систему методов, согласующихся между собой и находящих своё обоснование в специфике дисциплины. Так, методы формирования ответственности и обязательности могут быть реализованы с помощью различных видов отчётных работ (лабораторных, практических, самостоятельных, контрольных и т.д.), результаты которых заносятся в электронный журнал предварительной аттестации, который смоделируется совместно со студентами на практических занятиях. Причём, студент имеет он-лайн доступ к журналу, а ,значит, в любое время (в т.ч. и дома) может быть в курсе своей успеваемости и успеваемости своих сокурсников.

Методы развития творческих способностей учащихся реализуются в самостоятельной работе над собственным проектом профессиональной направленности, который студенты защищают в конце курса, представляя своим сокурсникам презентацию, выполненную в приложении *MS PowerPoint* на требуемом дисциплиной уровне. Причём, базовая информация по основным положениям управления проектами включается в теоретическую часть курса, как примеры применения ИТ в различных областях управленческой деятельности.

Методы развития познавательного интереса и формирования опыта математической деятельности реализуются в применении математических моделей и методов при решении профильных задач социально-политического и социально-экономического характера с использованием ПО, установленного в компьютерном классе и находящегося в свободном доступе для самостоятельной установки на домашних компьютерах студентов.

Вывод. Как историческая информация в том или ином объёме может быть гармонично вписана в содержание практически любой математической дисциплины, так и ИТ эффективно применяются в решении задач социальной и политической направленности, а, значит, указанные методы можно использовать в процессе преподавания и других математических курсов, не только профильных направлений, и особенно при руководстве дипломными и курсовыми работами. Это будет стимулировать развитие устойчивого внутреннего познавательного интереса у студентов классического университета, формировать их собственный опыт с учётом общемирового математического опыта и актуального в современном мире применения новых информационных технологий, тем самым являясь одним из направлений формирования готовности к своей будущей профессиональной деятельности.

Список литературы

1. Иванов Д.А., Митрофанов К.Г., Соколова О.В. (2003). Компетентностный подход в образовании. Проблемы, понятия, инструментарий: Учебно-методическое пособие. М.: АПКиПРО.
2. Ившина Г.В., Каштанова Е.К. (2012). Самостоятельная работа студентов как средство развития математических компетенций // Современные исследования социальных проблем. Красноярск: Научно-инновационный центр. №4(12). 15 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: Казань стр. 192
3. Крючева Я.В., Гаврилюк Н.П. (2016). Деятельностный и компетентностный подходы в образовании: успешность в интеграции. // Профессиональное образование в современном мире. №6(3). С. 421-427.
4. Дороднева Н.А. (2005). Учебно-познавательная деятельность студента как творческий процесс: Дис. канд. пед. наук. Тобольск.
5. Педагогика: педагогические теории, системы, технологии. (2003). / С.А.Смирнова. М.: Академия.
6. Нурутдинова А.Р. (2012). Основные направления интеграции науки, образования и производства. // Современные наукоёмкие технологии. №4. С. 24-27

STIMULATION OF EDUCATIONAL AND COGNITIVE ACTIVITY IN THE FIELD OF THE HISTORY OF MATHEMATICS AT THE MATHEMATICAL FACULTY

E.V Nikulina
Ph.D. (Pedagogy), docent
lena13_75@mail.ru
Yaroslavl
Yaroslavl State University named after PG Demidov.

E.N. Gribova
Ph.D. (technology), Senior Lecturer
lena13_75@mail.ru
Yaroslavl
Yaroslavl State University named after PG Demidov.

Abstract. Changes in higher education, ongoing and ongoing events related to the introduction of new state educational standards are accompanied by a review of various aspects of the educational system (organizational, methodological, etc.). These changes are directly related to the activities of the educational process. In modern conditions, the teaching process should be directed to shared competencies. This means that the teacher must review all the fundamentals of the methodology. All of this requires the teacher to have enormous preliminary working conditions in conditions of uncertainty, when there are no uniform approaches to solving problems. In the article, within the framework of the competence and activity approaches, methods of stimulating educational and cognitive activity of students of the classical university of the Faculty of Mathematics in the field of additional courses in the history of mathematics and the Faculty of Social and Political Sciences in the field of non-core disciplines related to ICT are considered. It is noted that professional mathematical competence necessarily includes in its structure the motivational component (the presence of professional needs, motives, and goals) and practical (in particular, the experience of mathematical activity). At the same time, stimulating educational and cognitive activity in the field of history of mathematics and in the field of application of modern information technologies is considered as one of the directions for the development of professional mathematical competences and can be used not only within these disciplines, but more broadly - throughout the entire learning process high school.

Keywords: competence approach, classical university, faculty of mathematics, faculty of sociopolitical sciences, history of mathematics, information technologies, methods of stimulating educational and cognitive activity, mathematical competence.

References

1. Ivanov D.A., Mitrofanov K.G., Sokolova O.V. (2003). Competence approach in education. Problems, concepts, tools: Teaching guide. M.: APKiPRO.
2. Ivshina G.V., Kashtanova E.K. (2012). Independent work of students as a means of developing mathematical competence // Modern research of social problems. Krasnoyarsk: Research and Innovation Center. №4 (12). 15 s [Electronic resource]. Access Mode: Kazan p. 192
3. Kryucheva Ya.V., Gavrilyuk N.P. (2016). Activity and competence approaches in education: success in integration. // Professional education in the modern world. №6 (3). Pp. 421-427.
4. Dorodneva N.A. (2005). Educational and cognitive activity of a student as a creative process: Dis. Cand. ped. sciences. Tobolsk.
5. Pedagogy: pedagogical theories, systems, technologies. (2003). / S.A.Smirnova. M.: Academy.
6. Nurutdinova A.R. (2012). The main directions of the integration of science, education and production. // Modern high technologies. №4. Pp. 24-27

УДК 372.851

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ, СПОСОБСТВУЮЩИМ РАЗВИТИЮ УСТОЙЧИВОЙ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

Евгений Николаевич Лыков
ассистент
elean52@mail.ru
г. Елец

ЕГУ им. И.А. Бунина

Аннотация. Конструирование и отбор содержания профессионально ориентированных задач для конкретного занятия со студентами требует особого внимания. В статье рассмотрены основные критерии отбора профессионально ориентированных задач для того чтобы наиболее эффективно формировать устойчивую познавательную самостоятельность студентов. Также здесь отражены основные этапы внедрения комплекса профессионально ориентированных задач. Это позволило выявить основные требования, предъявляемые к профессионально ориентированным задачам, используемые в математической подготовке инженеров. В статье приведены некоторые задачи, используемые на занятиях со студентами разных специальностей, будущих инженеров. Возникновение интереса, побуждает студента к преодолению трудностей, это в свою очередь заставляет поверить в собственные силы и ещё больше развивает интерес. Здесь всё взаимосвязано и приводит к развитию **устойчивой познавательной самостоятельности**.

Ключевые слова: устойчивая познавательная самостоятельность студентов, профессионально ориентированные задачи, критерии отбора задач, основные этапы внедрения комплекса задач, основные требования к профессионально ориентированным задачам, математический аппарат, дифференциальные уравнения, практические занятия.

Реализация принципов проблемного обучения предполагает систематическое создание на лекциях и практических занятиях проблемных ситуаций, решение проблем, обучение студентов умению выделять главное, формулировать гипотезы и решать их, т.е. самостоятельному добыванию знаний. Основная задача преподавателя - подвести студентов к проблемам, создать условия осмысления их и способов их решения. Большую пользу при этом могут принести профессионально ориентированные задачи. Конструирование и отбор содержания профессионально ориентированных задач для конкретного занятия со студентами требует особого внимания.

Под профессионально ориентированной математической задачей будем понимать задачу, условие и требования которой определяют собой особую модель некоторой ситуации, возникающей в профессиональной деятельности инженера, а исследование этой ситуации осуществляется средствами математики и способствует профессиональному развитию личности специалиста. [5]

Комплекс профессионально ориентированных задач должен быть построен на принципах вариативности, наглядности, информационной компетентности и широты ассоциативных связей, что способствует пробуждению интереса у студентов к математике и профессиональной мотивации, а также формированию приёмов активизации творческого мышления.

Вышесказанное позволяет выявить основные критерии отбора профессионально ориентированных задач с целью формирования познавательной самостоятельности студентов:

- наличие инженерно-технической основы задачи в контексте профессиональной направленности;
- расположение математических средств и методов решения профессионально ориентированных задач в поле актуального опыта личности будущего инженера;
- комплексность применения математических знаний, методов и процедур на основе «анализа через синтез» [4];
- наличие элементов новизны и занимательности в задаче как благоприятных факторов пробуждения интереса к математике и мотивирования их творчества.

В процессе решения профессионально ориентированных задач формируется профессиональная мотивация и такой важный компонент творческой активности, как способность преобразовывать структуру объекта и метода получения результата, а у студентов формируется способность к этому. Студенты поэтапно строят математическую модель профессионально ориентированной задачи, тем самым определяют сущность этой задачи и возможности вариативности [2].

Внедрение комплекса профессионально ориентированных задач в процессе обучения будущих инженеров-бакалавров дифференциальным уравнениям проходит через следующие этапы:

1) подготовительный (здесь студенты осваивают основные знания по разделу «Дифференциальные уравнения», усваивают основные способы и методы решения различных дифференциальных уравнений);
2) мотивационно-ценностный (здесь студентам предлагаются различные образцы решения инженерно-технических и естественно-научных проблем с анализам и особенностями творческих решений);
3) тренировочный (на этом этапе происходит тренировка конвергентного мышления, постановка и поиск решения профессионально ориентированных задач с помощью дифференциальных уравнений, проверка адекватности решения);
4) исследовательский (здесь происходит развитие дивергентного мышления на базе профессионально ориентированных задач; наглядное моделирование на основе визуализации объектов и процессов; интуиция и прогноз результатов, проверка решения, генерирование выводов в соответствии с результатами проверки, применение выводов к новым данным, анализ обобщений).

Итак, профессионально-ориентированные задачи, используемые в математической подготовке инженеров, должны удовлетворять следующим требованиям:

1) задача должна описывать ситуацию, возникающую в профессиональной деятельности инженера;
2) в задаче должны быть неизвестные характеристики некоторого профессионального объекта или явления, которые надо исследовать по имеющимся известным характеристикам с помощью средств математики (в частности, с помощью дифференциальных уравнений);
3) решение задач должно способствовать прочному усвоению математических знаний, приёмов и методов, являющихся основой профессиональной деятельности инженера;
4) задачи должны обеспечивать усвоение взаимосвязи математики со специальными дисциплинами и их содержание должно определять пропедевтический этап изучения понятий специальных дисциплин;

5) решение задач должно обеспечивать профессиональное развитие личности инженера.

Например, студентам технического направления подготовки может быть предложена следующая задача.

Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 120 см) защищён изоляцией толщиной 15 см; величина коэффициента теплопроводности к = 0,00017. Температура трубы 160°; температура внешнего покрова 20°. Найти распределение температуры внутри изоляции, а также количества тепла, отдаваемого 1 погонным метром трубы. [3]

При этом необходимо проиллюстрировать условие задачи красивыми слайдами, реализуя принцип наглядности. Данная задача решается с помощью дифференциального уравнения, и, следовательно, может быть разобрана при изучении раздела «Дифференциальные уравнения»

Можно рассмотреть и другие задачи:

1. На вертикальной пружине закреплён груз массой m. Груз выведен из положения равновесия в вертикальном направлении и затем отпущен. Найдём закон движения груза, пренебрегая массой пружины и сопротивления воздуха. [1]

Здесь составляется дифференциальное уравнение, опираясь на второй закон Ньютона. Далее, можно найти закон движения груза в условиях предыдущей задачи, но с учётом сопротивления среды, считая его пропорциональным скорости движения или с учётом того, что на груз действует возмущающая сила $f_1(t)$, т.е. вынужденные колебания без сопротивления среды.

2. Найти закон движения груза в условиях предыдущей задачи, считая внешнюю (возмущающую) силу равной $A_1 \sin \beta t$.
3. Здесь требуется найти закон движения груза при наличии возмущающей синусоидальной силы и сопротивления среды, которое пропорционально скорости движения, т.е. вынужденные колебания в среде с сопротивлением.

Студентам по специальности «Радиотехника» можно предложить задачу на колебательный контур. Колебательный контур – это электрическая цепь, которая состоит из конденсатора и катушки, присоединённой к обкладкам конденсатора. Если конденсатор присоединить к батарее, то его пластины получат некоторый заряд и на его обкладках возникнет разность потенциалов. После присоединения заряженного таким образом конденсатора к катушке он начинает разряжаться и в цепи появится электрический ток. Но сила тока благодаря явления самоиндукции будет увеличиваться постепенно и достигнет своего наибольшего значения, когда конденсатор полностью разрядится. При этом в силу самоиндукции ток исчезнет не сразу. Постепенное уменьшение силы тока вызовет перезарядку обкладки конденсатора. Когда ток исчезнет, обкладки конденсатора окажутся перезаряженными, система вернётся в исходное положение и процесс пойдёт в обратном направлении. Возникнут электрические колебания.

Задача. *Последовательно включены конденсатор ёмкости C, катушка с индуктивностью L. В начальный момент заряд конденсатора равен q_0, а через катушку течёт ток I_0. Найти закон изменения силы тока (сопротивлением пренебречь).* [1]

Мы рассмотрели задачи на колебания, решение которых приводит к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Уравнения этого вида возникают при рассмотрении многих других колебательных явлений: колебаний антенны, рессоры, качки корабля и т.д.

При изучении любых тем и разделов математики в случае необходимости всегда можно найти задачу с практическим содержанием. Как правило разбор таких задач занимает большое количество времени. Поэтому необходимо некоторые из них выносить на обсуждение в студенческие научные общества на самостоятельное изучение. При этом можно активно использовать метод проектов и другие методы в обучении.

На наш взгляд, всё это поспособствует развитию **устойчивой познавательной самостоятельности,** которая повлечёт за собой устойчивое овладение математическим аппаратом. Овладение математическим аппаратом это одна из наиболее важных задач будущего инженера. Этот инструмент поможет овладеть другими важными профессиональными задачами. Поэтому студентам необходимо больше времени уделять математике, математическим моделям, математическим приложениям. При этом использовать не только материал, полученный на занятиях, но и активно использовать различные познавательные сайты в сети Интернет, электронные библиотеки и другие дополнительные источники знаний. Нельзя пренебрегать и обычными библиотеками, посещать читальные залы, так как здесь царит особая атмосфера, настраивающая на работу. Задача преподавателя подтолкнуть студентов к научной работе, заинтересовать и заставить поверить в собственные силы. При подготовке к научно-практической конференции студенты с готовностью берутся за подготовку к докладу по какой-либо теме. В процессе подготовки возникает интерес (у кого-то сильный, устойчивый, у кого-то слабее). Этот интерес усиливается во время преодоления каких-либо математических трудностей. И вот здесь надо отдать должное вере в собственные силы, так как без этого сложную математическую задачу не решить. Чем больше решается таких задач, тем сильнее развивается интерес. Бывает так, что собственных сил не хватает, и тогда заинтересованный в решение данной задачи студент обращается за помощью к преподавателю. С помощью наводящих вопросов и сопутствующих задач преподаватель помогает и подводит студента к решению данной проблемы. Важно, чтобы студент не останавливался и шёл к поставленной цели. Конечно, это возникает только тогда, когда у него высокий уровень познавательной самостоятельности.

Итак, возникновение интереса, побуждает студента к преодолению трудностей, это в свою очередь заставляет поверить в собственные силы и ещё больше развивает интерес. Здесь всё взаимосвязано и приводит к развитию **устойчивой познавательной самостоятельности**. При этом необходимо что бы всегда присутствовало взаимопонимание между преподавателем и студентом. Так как, отсутствие взаимопонимания между преподавателем и студентом - большой недостаток любого педагогического процесса в то числе и проведения лекции. Необходимо проводить контроль над записями студентов так как нередко они не содержат всего материала который им был дан лектором. Причины могут быть разными, однако необходимо вовремя оказать помощь, например, можно дать те же лекции в электронном варианте, и на лекции больше потратить времени на объяснение этого материала, разнообразить интересными фактами, историей математических открытий. При проведении экзамена и ли зачёта необходимо помнить, что некоторые формулы очень трудны в запоминании и здесь важно не то знает ли студент формулу или нет, а то, как он её понимает, как она выводится, для чего она необходима.

Например, при решении уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

на отрезке [0,l] методом разделения переменных используется формула:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{-a^2\pi^2 n^2 t}{l^2}} \sin\frac{\pi n x}{l}, \text{ где } C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

Допустим, студенту необходимо решить на экзамене такое уравнение, но формулу забыл. Он добросовестные студент может её вывести, однако это занимает большое время, и он не успевает. К счастью, преподаватель может побеседовать с таким студентом и выяснить истинный уровень знаний и поставить оценку «отлично» даже если поставленная задача не решена. Поэтому неплохо разрешить студентам на экзаменах иногда пользоваться конспектами, чтобы при подготовке к экзаменам они тратили время на изучение материала, а не на изготовление «шпаргалок». Очень важно, как студент понимает материал, а не то что он представляет при ответе на экзамене. Не секрет, что новейшие информационные технологии позволяют не добросовестным студентам на экзамене выдать такой материал, что даже сам преподаватель затруднится в оценке того что написано, но стоит задать несколько дополнительных вопросов по тексту выясняется что студент не понимает его смысла, да и вообще смысла отдельных слов, символов, формул. Вот такому студенту ставится заслуженная «двойка».

Необходимо развивать доверие студента преподавателю на лекциях. Здесь большое значение имеют профессионально ориентированные задачи. Эти задачи развивают интерес к науке и научной деятельности. Практические занятия - наиболее активная форма общения преподавателей со студентами. На практических занятиях по математике формируются способы деятельности, умения и навыки, творческая самостоятельность. Эти занятия должны служить средством формирования познавательной самостоятельности будущих бакалавров и магистров.

При проведении практических занятий было замечено, что применение различных задач с практическим содержанием, значительно повышают уровень познавательной самостоятельности, повышается активность студентов. Проводилось анкетирование среди студентов физико-математического и инженерно-физического факультета. Более 95% опрашиваемых студентов высказались за то, что им необходимо решать задачи, которые имеют практический смысл. Более 60% считают, что недостаточным решить задачу одним способом и при решении задачи необходимо продумать другие возможные способы её решения. При этом большое оживление всегда приносят профессионально ориентированные задачи. Так как они настраивают студентов на будущую профессию.

Список литературы

1. Виленкин Н.Я., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Просвещение, 1984.
2. Зубова Е.А. Формирование творческой активности будущих инженеров при исследовании и решении профессионально ориентированных задач в процессе изучения математики / Е.А. Зубова// Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2009. №98.
3. Пономарёв К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. М.: Просвещение, 1962.
4. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии: В 2 т. / Т.I, II. М.: Педагогика, 1989. 488 с., 388с.

5. Федотова Т.И. Профессионально ориентированные задачи по математике как средство формирования профессиональной компетентности будущих инженеров/ Т.И. Федотова // Вестник Бурятского государственного университета, 2009, №15.

THE MAIN REQUIREMENTS TO PROFESSIONALLY FOCUSED MATHEMATICAL TASKS PROMOTING DEVELOPMENT OF STEADY COGNITIVE INDEPENDENCE OF STUDENTS

E.N. Lykov
elean52@mail.ru
Elets

Bunin State University

Abstract. The design and selection of the content of professionally focused tasks for specific classes with students demands special attention. The article describes the main criteria for the selection of professionally focused tasks that most effectively form steady cognitive independence of students. There are also the main stages of introduction of a complex of professionally focused tasks in the article. We revealed the main requirements for professionally focused tasks, used in mathematical training of engineers. The article describes some of the tasks used in the classroom with students of different specialties. The developing of interest encourages students to overcome difficulties. It leads students to believe in their own strength and develops their interest. Everything is interconnected and leads to development of steady cognitive independence.

Keywords: steady cognitive independence of students, professionally focused tasks, criteria for selection of tasks, the main stages of introduction of a complex of tasks, the main requirements to professionally focused tasks, mathematical apparatus, the differential equations, a practical training.

УДК 372.851

О ПРОБЛЕМАХ ВНЕДРЕНИЯ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ВЕРОЯТНОСТНОГО СТИЛЯ МЫШЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ИНФОРМАТИЗАЦИИ

Ксения Геннадьевна Лыкова
специалист по УМР
ksli1024@mail.ru
г. Елец

ЕГУ им. И. А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена актуальной проблеме качественной подготовки школьников к Единому государственному экзамену по математике профильного уровня в результате формирования вероятностного стиля мышления средствами информационных технологий. Дана характеристика компонентов, определяющих развитие вероятностного стиля мышления. Предложена содержательная составляющая элективного курса по математике в системе общего образования. Представлена группа заданий, способствующих совершенствованию каждого из типов мышления.

Ключевые слова: Единый государственный экзамен (ЕГЭ), элективный курс, информационные технологии, вероятностный стиль мышления, логическое мышление, интуитивное мышление, пространственное мышление, функциональное мышление, творческое и критическое мышление.

Стремительность социально-экономических перемен жизни современного общества оказывает сильное воздействия на модернизацию и реформирование российского образования. Информатизация общества определяет доминирующий характер активного использования разнообразных средств информационных технологий во всех сферах человеческой деятельности. Изменение образовательной парадигмы обуславливает переход от адаптирующего образования к деятельностному и личностно-ориентированному. Приоритетным направлением является развитие и саморазвитие личности обучающегося, повышение конкурентоспособности выпускников школ, формирование навыков применения информационной среды для обеспечения качества, результативности и эффективности образовательного процесса.

Математическому образованию в системе основного общего образования отводится одно из ведущих мест, что определяется ярко выраженной практичностью математических знаний, умений и навыков, возможностями формирования особого стиля мышления учеников, вкладом в развитие научных представлений об универсальной природе многих случайных явлений и процессов действительности.

Несмотря на постоянно увеличивающийся уровень развития образовательных методик с применением всевозможных средств информационных технологий, выпускники средней школы по-прежнему сталкиваются с трудностями подготовки и написания ЕГЭ по математике профильного уровня. Невысокий балл по ЕГЭ сильно ограничивает выбор как учебного заведения для поступления, так и направления подготовки, что негативно сказывается на дальнейшем будущем подростка.

С 2019 года в содержание экзамена будут внедрены интегрированные задачи, призванные оценить многогранное владение предметом. Новый интегрированный вариант позволит оценить умение оперировать базой собственных знаний в области разных разделов алгебры и геометрии в формате одного задания. В сложившихся обстоятельствах наиболее выгодным вариантом решения проблемы является развитие новой культуры мышления, т.е. формирования у школьников особого стиля мышления – вероятностного.

Стиль мышления старшеклассников должен соответствовать требованиям, предъявляемым к ним со стороны общества и государства, а также отображать закономерности современной научной картины мира. Особенностью такого стиля мышления является системность, фундаментальность знаний, умения их применения в ситуациях неопределенности, оценка случайных факторов, высокая адаптивность в информационной среде, творческая активность.

Под вероятностным стилем мышления (ВСМ) следует понимать «практически реализуемую открытую систему интеллектуальных приёмов и операций для глубокого познания объектов и явлений окружающего мира, их закономерностей с учетом случайного разнообразия и сущности составляющих элементов в их единстве и взаимосвязи». [1, с. 175].

Стиль мышления есть определённая модель, полученная путем комбинирования типов мышления, сформированных в ходе учебной деятельности, жизненного опыта. Соответственно и вероятностный стиль мышления определяется как интеграция отдельных типов мышления, опирающихся на природу гуманитарных и естественнонаучных познаний.

Формирование стиля мышления учащихся в процессе обучения выполняется за счет владения, использования и совершенствования ими мыслительных действий и операций в проблемных учебных ситуациях, основу которых составляют мыслительный процесс (анализ, синтез, обобщение, сравнение и т.д.) и формы мышления (понятия, суждение, умозаключение),

Развитие вероятностного стиля мышления в процессе обучения математике впервые было исследовано в докторской диссертации С. Н. Дворяткиной [1, с. 175; с. 184].

Разберем следующую структуру доминантных типов мышления ВСМ, обуславливающих стремление личности к саморазвитию и повышение успешности учебной деятельности:

1. Логический тип мышления базируется на применении логических конструкций, отвечающих за тщательное проектирование и реализацию решений проблемы. Как отмечал Л. Е. Балашов «Логическое мышление – мышление по правилам» [2].
2. Интуитивный тип мышления определяется возможностью генерации новых идей, установления множества решений задач, в течении короткого промежутка времени вынесение заключений на основе неопределенных данных без логических рассуждений.
3. Пространственное (наглядно-образное) мышление – умения оперировать пространственными образами, комбинировать их, трансформируя и вычленяя важные элементы, без выполнения реальных практических действий с ними. Усиление таких показателей пространственного мышления как точность, широта и полнота оперирования и создания образов, в значительное число раз увеличивают продуктивность математической деятельности.
4. Функциональный тип мышления отвечает за установление как общих, так и единичных связей, отношений между математическими объектами, их глубинными свойствами.
5. Творческий и критический типы мышления. Важно отметить, что творческий

подход к решению задачи будет весьма неэффективным без критического анализа проблемы. Важно не только уметь находить новые или качественно иные пути решения математической задачи, но и выполнять оптимизированную проверку полученных решений с целью их последующего прикладного применения. К тому же выявление таких сторон и свойств объектов, которые изначально не были заметны в ходе решения, упрощает задачу.

В результате решения задач определённой группы, каждая из которых способствует становлению отдельного типа мышления, мы сможем развить ВСМ у школьников.

Одним из наиболее актуальных инструментов для подготовки обучающихся к ЕГЭ является использование элективных курсов, направленных не только на расширение образовательных возможностей изучаемых предметных курсов, но и на углубление отдельных тем, представленных в ЕГЭ по математике.

Цель курса - создание условий для формирования и развития у обучающихся основ логического, интуитивного, пространственного, функционального, творческого и критического мышлений в процессе подготовки к итоговой аттестации в форме ЕГЭ, путем коррекции и расширения математических знаний.

Задачи курса:

• раскрытие интеллектуального потенциала обучающихся;

• повышение культуры мышления;

• формирование опыта творческой деятельности учащихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач;

• получение опыта создания математических моделей исследуемых объектов;

• формирование умений свободно ориентироваться в информационном пространстве;

• развитие коммуникативных и общеучебных навыков работы в группе, самостоятельной работы, умений вести дискуссию, аргументировать ответы и т.д.

Содержание элективного курса по математике в системе общего образования состоит из пяти групп заданий, каждая из которых нацелена на улучшение определенного типа мышления:

1. Первая группа заданий есть решение тригонометрических, показательных, логарифмических и комбинированных уравнений и неравенств, представленных во второй части № 13 и № 15. Прикладные задачи данной подгруппы способствуют развитию логического типа мышления, основными мыслительными действиями которого являются: анализ, синтез, обобщение, систематизация, конкретизация.
2. Вторая группа заданий – вероятностные задачи (№ 4), расположенные в первой части, позволяют усиливать интуитивный тип мышления. Развитие интуитивного мышления происходит не только при решении простых задач, но и за счет подробного изучения элементов теории вероятностей, комбинаторики и математической статистики, представленных в школьном курсе математики. В задачах подобного характера целесообразно использовать механизм комбинирования, так как в большинстве случаев число получаемых комбинации слишком велико, именно интуиция позволяет выбрать верный вариант решения.
3. Третья группа заданий - стереометрические задачи (№ 14), направленные на совершенствование пространственного (наглядно-образного) мышление в результате зрительного представления образов, их видоизменений и нахождения

отличий исследуемых признаков. Мыслительной операцией, определяющей развитие пространственного мышления в процессе организованного обучения, является механизм транспонирования – применение ранее полученных методов, правил решения в новой похожей задаче.

4. Четвертая группа заданий – финансовые задачи (№ 17), отвечающие за становление функционального типа мышления, характеризующегося умениями оперировать причинно-следственными связями, применением операционно-действенного подхода, а главное актуализации прикладного аспекта математики.
5. Пятая группа заданий – задачи на сообразительность (задачи повышенной сложности № 19), для их решений необходимо наличие типов творческого и креативного мышлений с применением механизма оценки.

Курс представлен в виде практикума, направленного на восполнение пробелов и систематизацию знаний старшеклассников при решении задач по основным разделам математики, осуществление целенаправленной качественной подготовки к ЕГЭ. Программа курса предусматривает возможность изучения тем курса с различной степенью полноты, обеспечивает прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, достаточных для изучения сложных дисциплин, и продолжения образования в высших учебных заведениях.

Изучение данного курса позволяет учащимся: использовать на практике нестандартные методы решения задач; повысить общий уровень математической культуры; формировать функциональную грамотность и вероятностной стиль мышления, позволяющий расценивать и рассчитывать процессы, явления случайной природы, оценивать вероятностный характер действительных зависимостей.

Особенностью элективного курса является интеграция разных тем программы «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 классов профильного уровня с ярко выраженной практической значимостью выполняемых заданий.

Подбор заданий, включенных в курс, осуществлялся при работе с открытыми банками (базами) задач ЕГЭ по математике [5], [6], [7], демонстрационными вариантами ЕГЭ 2018 - 2019 года.

Рассмотрим следующие примеры, направленные на развитие каждого из указанных типов мышления.

Задача 1. Решите уравнение: $\sin 8\pi x + 1 = \cos 4\pi + 2 \cdot \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ [7].

Решение. Анализ через синтез.

Решение уравнения целесообразно начать с анализа. Составляется алгоритм, подбираются подходящие тригонометрические формулы, позволяющие не усложнять решение и экономить время. Выполняется последовательность действий. Осуществляется разбиение задачи на составные части.

1. Воспользуемся формулой двойного угла для функции $\sin 8\pi x$;
2. формула вычитания аргумента для функции $\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$;
3. подставим результаты, при вынесении общего множителя за скобку получим распадающиеся уравнение: $(\sin 4\pi x + 1)(2 \cdot \cos 4\pi x - 1) = 0$.
4. решим получившееся уравнение (применяя формулы тригонометрических уравнений и частные случаи).

В процессе решения мы двигались от известных величин, то есть использовали обобщенный алгоритм нахождения решения. Проведенный анализ есть логическое, методичное и тщательное решение задачи. При помощи определения плана решения, сбора нужной информации, упорядочивания и рационального поиска формул, мы наиболее быстро получили результат. Проведенная работа является непосредственным отображением механизма анализа мыслительной деятельности.

Задача 2. На листах бумаги записаны числа от 1 до 24. Эти листы были помещены в ящик и перемешаны. При чем из этого ящика был вынут один лист бумаги. Какова вероятность того, что число, указанное на этом листе, будет либо простым, либо чётным [7]?

Решение. Механизм комбинирования.

В данной задаче комбинирование отдельных её элементов поможет прийти к решению. Осуществим комбинацию таких элементов базовых знаний, как простые числа, четность чисел, вероятностные знания – совместные события и теорема сложения вероятностей.

Пусть событие А – {на изъятом листе простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13,17,19, 23}; В – {на изъятом листе чётные числа: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24}. Событие АВ – {на изъятом листе простое чётное число: 2}.

Решение задачи сводится к нахождению числа комбинация для события А, события В и события АВ, применению.

Исходя из того, что исходы эксперимента равновозможные, то Р(А) $= \frac{9}{24} =$ 0,375; Р(В) $= \frac{12}{24} =$ 0,5; Р(АВ) $= \frac{1}{24} =$ 0,042.

По теореме сложения вероятностей совместных событий - искомая вероятность составляет 83,3 %.

В процессе решения опирались на метод, отвечающий за использование имеющихся знаний учеников к условиям задачи. Применяемый подход позволяет говорить о качественном изменении умственных способностей школьников.

Задача 3. В кубе ребро, которого равно а, центр верхнего основания соединен с вершинами нижнего основания. Найдите полную поверхность полученной пирамиды.

Решение. Механизм транспонирования.

1 шаг. Выполняется построение и демонстрация преобразований исследуемых объектов, изменений положений в пространстве, исследуются комбинации их трансформаций, то есть формируется целостное представление об исследуемых фигурах, с вычленением отдельных существенных признаков. Для наглядности и визуализации чертежа воспользуемся бесплатной кроссплатформенной динамической математической программой Geogebra [8]. Построение модели осуществляется последовательно вместе с обучающимися, актуализируются их знания о свойствах объектов, ни в коем случае не предлагается готовый чертеж. В результате получается пирамида, вписанная в куб (рис.1, рис.2).

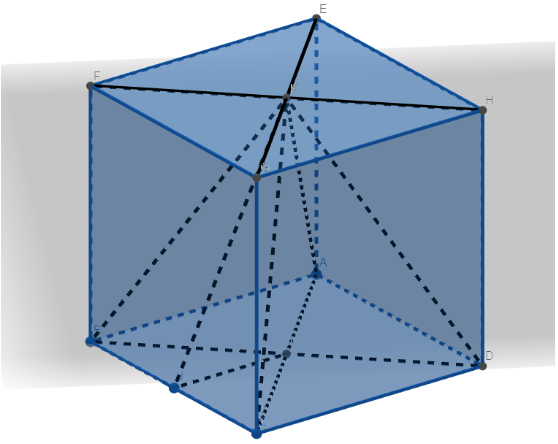


Рис. 1

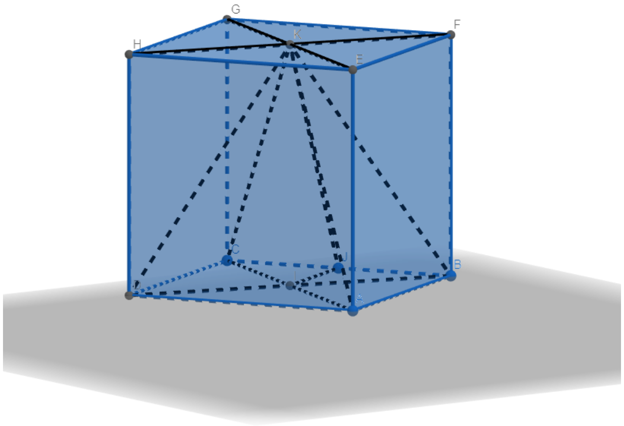


Рис. 2.

2 шаг. Постановка проблемной ситуации, поиск и подбор оптимального варианта решения, осуществляется за счет перенесения ранее полученных и применяемых знаний обучающихся в условия выдвигаемой задачи. Используется формула нахождения площади полной поверхности пирамиды, предварительно отыскав составляющие ей элементы.

Задача 4. Мебельная фабрика производит книжные шкафы и серванты. На изготовление одного книжного шкафа расходуется 4/3 м. кв. древесно-стружечной плиты,4/3 м. кв. сосновой доски и 2/3 м. кв. человеко-часа рабочего времени. На изготовление одного серванта расходуется 2 м. кв. древесно-стружечной плиты, 1,5 м. кв. сосновой доски и 2 человеко-часа рабочего времени. Прибыль от реализации одного книжного шкафа составляет 500 руб., а серванта – 1200 руб. В течение одного месяца в распоряжении фабрики имеются: 180 м. кв. древесно-стружечной плиты, 165 м. кв. сосновых досок и 160 человеко-часов рабочего времени. Какова максимально ожидаемая месячная прибыль [5]?

Решение.

Постараемся выявить отношения между причиной и следствием, установив зависимости между рассматриваемыми величинами.

Проведем исследование: x шт. – число книжных шкафов; y шт. - число сервантов; z руб.- ожидаемая месячная прибыль; z - функция двух переменных: z = $500 \cdot x \; +1200 \cdot y$. Определив наибольшее значении функции z в ограниченной области, получим искомый результат.

Предварительно рассмотрев систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0; \\ y \geq 0; \\ \frac{4}{3}x + 2y \leq 180; \\ \frac{4}{3}x + \frac{3}{2}y \leq 165 \\ \frac{2}{3}x + 2y \leq 160; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; \\ y \geq 0; \\ y \leq 90 - \frac{2}{3}x; \\ y \leq 110 - \frac{8}{9}x; \\ y \leq 80 - \frac{1}{3}x. \end{cases}$$

Функция z(x, y) принимает наибольшее значение в точке B (30,70), рис. 3 [9].

Следовательно, определив точку пересечения функции и прямой, функция z(x, y) имеет вид z=(30;70)=99000.

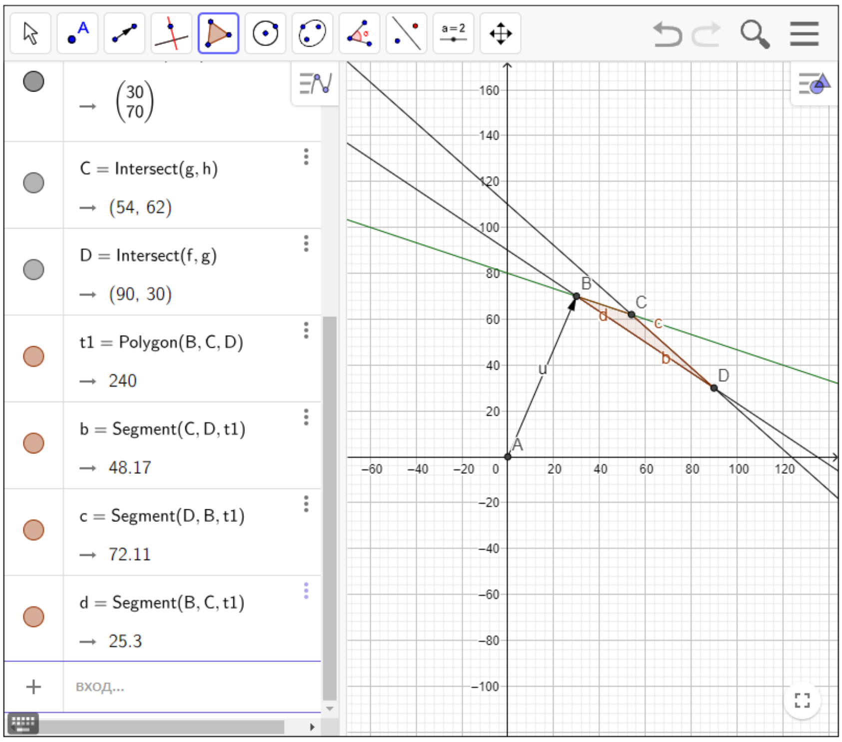


Рис. 3

Задача 5. а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии [7]?

Решение. Механизм оценки.

В задаче производится подбор выбора наиболее эффективного и оптимального варианта решения проблемы, опирающегося на простоту и логичность рассуждений. Посредствам критического мышления выполняется анализ и сравнение возможных вариаций получения результата. Оценив предложенную прогрессию, без ограничения общности как возрастающую, условимся: a — первый член прогрессии, n — количество членов, а d — её разность. Числа a, n, и d — натуральные.

Проведя оценку, придем к следующим заключениям:

а) Сумма первого и пятого членов этой прогрессии имеет вид $2 \cdot a + 4 \cdot d$, то есть число четное. Так как число 99 нечётное, то, следовательно, и сумма наибольшего и наименьшего членов конечной арифметической прогрессии из 5 натуральных чисел не может быть равной 99.

б) Сумма первого и шестого членов этой прогрессии – $2 \cdot a + 5 \cdot d = 9$. Установив, что d — натуральное число и d = 1, тогда a = 2, а прогрессия выглядит так: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

в) Применяя формулу среднего арифметического, получим: $2 \cdot a + (n-1) \cdot d = 13$, очевидно $(n-1) \cdot d \leq 11$; $n-1 \leq 11$; $n \leq 12$. Так как натуральные числа от 1 до 12 составляют прогрессию, среднее арифметическое членов которой равно 6,5, а количество членов равно 12. Поэтому наибольшее возможное количество чисел —

12.

Таким образом, использование предложенных механизмов мыслительных действий и операций в решении математических задач является условием совершенствования каждого из определенных типов мышления.

В аспекте изучаемой проблемы добиться развития вероятностного стиля мышления можно за счет уравновешивания указанных ранее типов мышления при переводе их на более высокий качественный уровень, а именно, добившись взаимного функционирования каждого из типов мышлений при изучении школьного курса математики профильного уровня на основе активного овладения формами мышления и их совершенствованием [1, с. 216].

Многообразие предлагаемых автоматизированных тестовых вариантов ЕГЭ по математике разного уровня сложности [6] непременно положительно сказывается на подготовке к экзамену. Ведь для лучшего закрепления знаний и навыком необходимо как можно больше практиковаться в решениях задач, изучать алгоритмы их функционирования. Но в то же время действия по образцу и шаблону никогда не смогут гарантировать отличный результат, так как репродуктивная (воспроизводящая) деятельность не сравнится с творческой деятельностью. Неумение выходить за рамки, использовать критический подход к решению, не пытаться даже отыскать альтернативные пути, все это свидетельствует о несостоятельности обучения. Ни для кого не секрет, что часто реальные задания ЕГЭ могут в значительной степени отличаться от тренировочных вариантов, и тогда наработанные алгоритмы выполнения заданий будут весьма малоэффективными. Как следствие, именно формирование у школьников разносторонних аспектов развития личности, разнообразных типов мышления, составляющих структура одного более обобщённого стиля мышления (вероятного) – вот факторы успешности образовательного процесса.

Список литературы

1. Дворяткина С. Н. Развитие вероятностного стиля мышления студентов в обучении математике на основе диалога культур : диссертация ... доктора педагогических наук : 13.00.02 / Дворяткина Светлана Николаевна; [Место защиты: Елецкий государственный университет]. - Елец, 2012. - 527 с. : ил.Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования).
2. Балашов Л. Е. Как мы думаем? Введение в философию мышления [Текст] / Л. Е. Балашов. –М., 2006. -172.
3. Балашов Л. Е.. Философия: Учебник.. — М., 2003. — С. 502.
4. Гуленко В.В. Формы мышления. Соционика, ментология и психология личности, № 4, 2002.
5. ЕГЭ по математике. URL: http://spadilo.ru/ege-po-matematike (дата обращения: 16.02.2019).
6. Задания ЕГЭ профильная математика. URL: https://bingoschool.ru/ege/maths-profile/tasks/ (дата обращения: 15.02.2019).
7. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильный уровень. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1 (дата обращения: 10.02.2019).
8. Geogebra. 3Д График. URL: https://www.geogebra.org/3d (дата обращения: 13.02.2019).
9. Открытый математический турнир URL:http://mathtourn.elsu.ru/#pagelogo (дата обращения: 16.02.2019).

ON THE PROBLEMS OF IMPLEMENTATION OF ELECTIVE COURSE IN MATHEMATICS IN THE SYSTEM GENERAL EDUCATION FOR THE DEVELOPMENT OF A PROBABILISTIC STYLE OF THINKING IN THE TERMS OF GLOBAL INFORMATIZATION

K. G. Lycova
spezialist in educational and methodical work
ksli1024@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The article is devoted to the actual problem qualitative training students for the Unified state exam in mathematics of the profile level as a result of the formation of probabilistic style of thinking by means of information technologies. In the article is the characteristic of the components determining the development of probabilistic style of thinking. The content of the components is proposed of the elective course in mathematics in the system of General education. Presented to the Group of tasks is contribute to the improvement of each type of thinking.

Keywords: The unified State exam, elective course, information technology, the probabilistic style of thinking, logical thinking, intuitive thinking, spatial thinking, functional thinking, creative and critical thinking.

References

1. Dvoryadkina S.N. (2012) Development of probabilistic thinking style of the students in learning mathematics on the basis of the dialogue of cultures [Development of probabilistic thinking style of the students in learning mathematics on the basis of the dialogue of cultures]: Dis. ... d-ra ped. nauk. Yelets.
2. Balashov l. E. (2006) How do we think? Introduction to philosophy of thinking / L. E. Balashov. - M.
3. Balashov L. E. (2003) Philosophy: Textbook. M.
4. Gulenko V. V. (2002) Forms of thinking. Socionics, mentology and personality psychology, no. 4.
5. EGE in mathematics. [Электронный ресурс] Accessed: http://spadilo.ru/ege-po-matematike (date of the application: 16.02.2019).
6. The job of EGE of profile mathematics. [Электронный ресурс] Accessed: https://bingoschool.ru/ege/maths-profile/tasks/ (date of the application: 15.02.2019).
7. Educational portal for EGE preparation. Mathematics profile level. [Электронный ресурс] Accessed: https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1 (date of the application: 10.02.2019).
8. Geogebra. 3D Graph. [Электронный ресурс] Accessed: https://www.geogebra.org/3d (date of the application: 13.02.2019).
9. Outdoor math tournament [Электронный ресурс] Accessed: http://mathtourn.elsu.EN/#pagelogo (date of the application: 16.02.2019).

УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ ГЛУБОКОГО МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Хижняк Анастасия Викторовна
учитель информатики
Ana-ger@mail.ru
г. Москва

ГБОУ г. Москвы «Школа № 1532»

Аннотация. В работе рассмотрены актуальные на сегодняшний день методики преподавания математики в старших классах средней общеобразовательной школы, в том числе методика обучения математике с применением информационно-телекоммуникационных технологий. Описан российский опыт разработки и внедрения обучающих систем, основанных на технологиях искусственного интеллекта (глубокое машинное обучение). Описана структура и принципы работы указанного программного обеспечения. Приведены некоторые особенности внедрения и эксплуатации интеллектуального программного обеспечения в образовательную систему средней общеобразовательной школы. Описан практический опыт применения технологии глубокого машинного обучения в математическом образовании старших классов средней общеобразовательной школы. Рассмотрены основные эффекты, возникающие при внедрении методики обучения математике с применение указанной технологии. Указаны факторы, сдерживающие процессы интеграции технологии глубоко машинного обучения в педагогическую систему школы.

Ключевые слова: методика обучения математике, искусственный интеллект, экспертные системы, информационно-телекоммуникационные технологии, нейронные сети, глубокое машинное обучение.

Введение

Постоянная модернизация технического и логического обеспечения информационного общества XXI века заставляет задуматься о повышении качества подготовки современного человека, специалиста к решению проблем реального мира. Учитывая, что первичная профильная подготовка проводится уже на базе старших классов учебных заведений среднего общего образования, а особое место в систематизации знаний и умений традиционно отводится математическим дисциплинам, несложно удостовериться в актуальности темы изучения методики преподавания математики в средней общеобразовательной школе, а также разработке предложений повышения эффективности ее применения [10].

Практика преподавания математики в России

Российская система образования считается одной из сильнейших в плане общенаучной подготовкой воспитанников средних и высших учебных заведений. Фундаментом для построения крепких, связных знаний из различных отраслей и областей деятельности выступает математика и технические дисциплины, адаптированные и подготовленные для усвоения каждым учащимся. Применение различных методик, облегчающих восприятие и усвоение сведений, неизменно ведет к повышению качества и усилению позиций российского технического образования в мире. Добиться такого результата невозможно без грамотного и активного участия педагога, учителя, наставника в процессе формирования математических навыков и умений обучающихся.

Русская математическая школа славится именами А.Н. Остроградского, Ф.В. Филипповича, Ю.М. Колягина, Г.Л. Луканкина, Л.Н. Ланда, Ю.К. Кулютина, В.И. Андреева, А.В. Хуторского и др. Однако, стоит отметить, что несмотря на надежность и высокую эффективность предложенных ими методик преподавания, в настоящее время продолжает формироваться и пополняться новыми идеями молодых специалистов копилка российских методических достижений. К числу таких методик можно отнести методику обучения на основе проектной деятельности, компетентностные методы обучения, современные эвристические методы обучения математики применяемые и описанные Е.А. Кошелевой, модификации теории решения изобретательских задач применительно к методике преподавания математики, предлагаемые М.М. Зиновкиной и многие другие [9, 12].

Высокий уровень компьютеризации жизненных процессов современного человека подразумевает активное применение компьютеров и информационно-коммуникационных технологий, в том числе и в сфере математического образования. Многие исследователи стали говорить о применении компьютера не только как вспомогательного средства отображения и распространения информации, но и как об инструменте предварительного синтезирования учебных сведений. Для реализации обозначенного свойства часто прибегают к одному из передовых направлений развития компьютерной техники – искусственному интеллекту.

Под искусственным интеллектом, согласно ГОСТ 15971-90 [1], принято понимать способность вычислительной машины моделировать процесс мышления за счет выполнения функций, которые обычно связывают с человеческим интеллектом. Наибольшее практическое применение идеи и принципы искусственного интеллекта нашли в области разработки и применения экспертных систем, нейронных сетей или систем глубокого машинного обучения, генетических алгоритмов и пр. В настоящее время активно проводится интеграция технологии глубокого машинного обучения в различные сферы жизни общества, в том числе в образование. Неудивительно, что подобные технологии оказывают серьезное влияние на методы преподавания математики на различных уровнях российской школы.

На настоящий момент имеется существенный положительный мировой опыт применения технологий искусственного интеллекта в образовании [5]. Многие российские исследователи занимаются изучением способов применения и разработки «умных» программ и программных комплексов для образования. Широкое распространение получили труды Н.Л. Юговой, И.В. Гречиной, Е.В. Мягковой М.А. Смирновой и др. в области применения экспертных систем в образовании. Не меньшую популярность имеют идеи применения технологий глубокого машинного обучения, обозначенные в исследованиях С.П. Грушевского, Н.Ю. Добровольской, Е.И. Горюшкина и др. [6, 7, 8]

Структура интеллектуальных программных комплексов

Проектирование электронной обучающей системы, чаще всего проходит через следующие этапы [4]:

1) Определение круга пользователей и их функций – в случае «умного» обучающего продукта здесь возможно выделить собственно обучающегося, усваивающего знания, обучающего, контролирующего процесс обучения и вносящего коррективы по мере необходимости, администратора, отвечающего за техническую исправность программного продукта, и др.

2) Постановка целей и задач конкретного курса в соответствии с

требованиями ФГОС СОО, рабочих программ и прочей нормативно-методической документации.

3) Отбор и структурирование учебного материала с учетом целевых показателей, в том числе подбор и определение изучаемых тем.

4) Определения последовательности изучения учебного материала, формирование индивидуального вектора обучения (на этом этапе удобно применять кибернетические технологии интеллектуального анализа данных, например, основанные на теории нечетких алгоритмов, наиболее известным приложением которых являются механизмы глубокого машинного обучения).

5) Определение общей структуры электронного курса.

После своей реализации по указанному алгоритму, обучающие программы, построенные с применением технологий глубокого машинного обучения, чаще всего будут иметь схожую структуру, состоящую из нескольких элементов (рис. 1). Наиболее крупным и значимым из них является и функциональный модуль. Немаловажны также справочный модуль и модуль редактирования контекста или содержания.

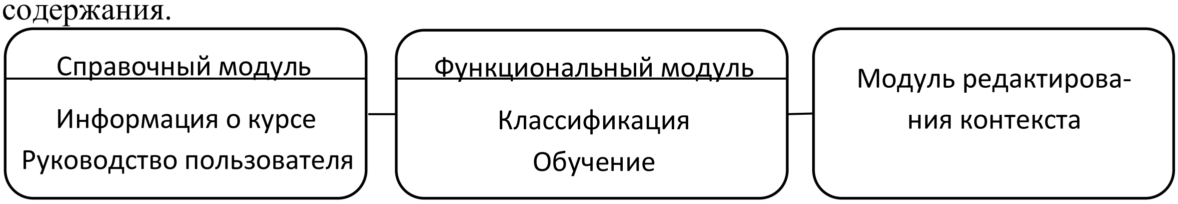


Рис. 1

Одним из самых интересных и содержательных элементов является функциональный модуль, позволяющий проводить классификацию обучающихся, а также проводить их обучение и тестирование. Рассмотрим логику выполнения им функции более подробно (рис. 2):

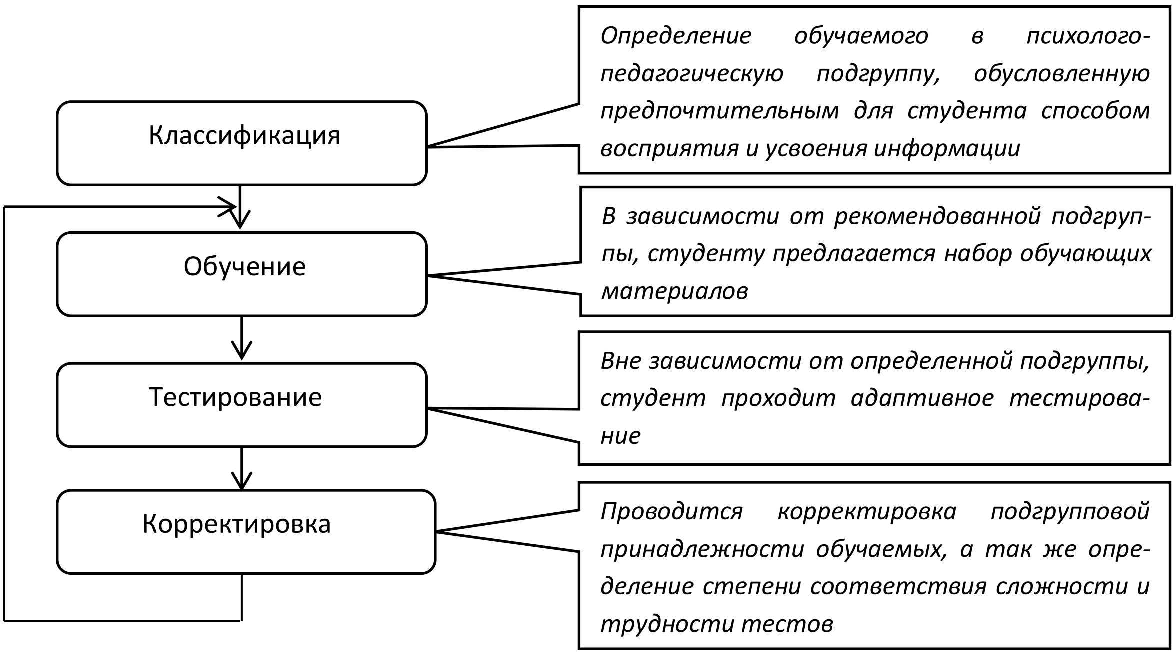


Рис. 2

Особенности преподавания математики с привлечением методов глубоко машинного обучения

Преподавание математических дисциплин в контексте освоения учебных программ старшей ступени средней школы требует от педагога глубоких, прочных знаний собственно математики, общей теории и методики преподавания, истории дисциплины, философии и психологии. Кроме того, педагог должен обладать значительным практическим опытом применения предлагаемых им теоретических положения. Существующие формы организация занятий с учащимися, будь то лекционные или практические занятия, проектная деятельность или научная консультация, требуют от наставника высочайшей степени сосредоточения, выдержки и предварительной подготовки. Современный учитель обязан принимать во внимание индивидуальные особенности и потребности каждого обучающегося в группе, в том числе особенности физиологического и психологического развития. На фоне укрупнения учебных классов, объединения и экономической оптимизации учебного процесса, явно прослеживается общее увеличение рабочей нагрузки на педагогического работника. Как уже отмечалось выше, преодолеть подобное усложнение деятельности вручную тяжело и не вызывает сомнений необходимость привлечения средств электронно-вычислительной техники. Однако, когда разговор заходит о применении более сложных логических структур, часто возникает ситуация их игнорирования или полного отрицания, в связи с чем появляется необходимость озвучить некоторые особенности преподавания математики с применением технологии глубокого машинного обучения.

Необходимо понимать, что вовлечение методов глубокого машинного обучения в преподавание математики в средней общеобразовательной школе не сможет заменить преподавателя-человека и призвано, в том числе, облегчить его нелегкий труд. Методы глубокого машинного обучения повышают гибкость компьютера как инструмента передачи человеческого знания, умения и навыка, никак не посягая на роль творца этого знания. Эта особенность требует отдельного озвучивания, поскольку современное смешение мировых образовательных традиций и мнений привело к ложному формированию идеи о машинном «сверхинтеллекте», способном полностью вытеснить и заменить человека в привычной деятельности [3].

Гибкость является отличительной чертой методов глубокого машинного обучения. Она позволяет преподавателю эффективно выстраивать индивидуальные траектории обучения учащихся с минимальными ресурсными, временными затратами. Глубокое машинное обучение позволяет подстегнуть стремление обучающихся к самостоятельному овладению дисциплиной, что открывает перед педагогом широкие возможности в духе лузитанинской математической школы, направленной на развитие способностей к самостоятельному решению возникающих творческих задач.

Помимо особенностей прямо вытекающих из принципов технологии глубокого машинного обучения, методики обучения математике с применением интеллектуальных компьютерных образовательных программ, основанных на технологиях глубокого машинного обучения, обладают рядом «общепрограммных» особенностей, а именно возможностью свободного планирования учебных курсов и выбора времени их изучения, что становится особенно актуальным в условиях инклюзивного обучения, одновременного обучения нескольких групп учащихся, дистанционных форм образования.

Опыт применения методов глубокого машинного обучения в практике преподавания математики в старших классах средней общеобразовательной школы

Учитывая изложенные выше положения по проектированию и применению инновационных обучающих программных средств, был проведен педагогический эксперимент, основным проверяемым положение которого стало утверждение об эффективности применения интеллектуальной компьютерной обучающей системы по математике на основе технологии глубокого машинного обучения в качестве средства технической поддержки обучения.

В ходе проведения эксперимента были сформулированы принципы проектирования интеллектуальной системы, описана структура указанного программного продукта, проведено его построение и апробация в старших классах средней общеобразовательной школы на примере раздела «Элементы теории вероятностей».

Оценка эффективности педагогического средства проведена в виде диагностики и оценки таких как ключевых параметров как: предметные знания, стремление к изучению дисциплины, уровни познавательной и творческой активности, способность к самоактуализации.

Диагностирование уровня овладения предметными компетенциями в области математики было проведено с помощью классического тестирования навыков. Диагностика мотивации учения и эмоционального отношения к учению в отношении учащихся старших классов средней общеобразовательной школы проводилась согласно методике Ч.Д. Спилбергера в модификации А.Д. Андреевой. Уровень развития когнитивных процессов учащихся оценивался с помощью комбинации нескольких диагностических средств: диагностики по методике изучения состояния кратковременной памяти А.Р. Лурия «Оперативная память», методике определения уровня развития логического мышления У. Липпмана «Логические закономерности», оценке внимания по методике Г. Мюнстерберга. Также была применена методика Н.Ф. Вишняковой «Креативность», поскольку она позволяет провести не только оценку способности к самоактуализации учащихся, но также охарактеризовать продуктивно-созидательную направленность личности и провести экспресс-анализ способности к профессиональному творчеству. [10]

В ходе проведения формирующего эксперимента были проведены диагностики контрольной и экспериментальной групп учащихся. Итоговые значения диагностируемых показателей представлены в таблице 1:

Таблица 1

Диагностируемая компонента	Уровни развития процессов, %						Средний уровневый показатель	
	Низкий		Средний		Высокий			
	конт.гр.	эксп.гр.	конт.гр.	эксп.гр.	конт.гр	эксп.гр	конт.гр.	эксп.гр.
Предметные знания	48,26	24,14	37,93	41,38	13,79	34,48	1,66	2,1
Мотивация	37,93	10,34	41,38	62,07	20,69	27,59	1,83	2,17
Кратковременная память	31,03	10,34	48,28	41,38	20,69	48,28	1,90	2,52
Логическое мышление	34,48	6,90	44,83	55,17	20,69	37,93	1,86	2,55
Внимание (избирательность, концентрация)	41,38	17,24	44,83	44,83	13,79	37,93	1,73	2,45
Креативность (самоактуализация)	27,59	24,14	37,93	34,48	34,48	41,38	2,07	2,17
Интегральный уровневый показатель							1,84	2,33

Для удобства сравнительного анализа все диагностические данные были распределены по уровням: низкий, средний и высокий. На основе процентного распределения испытуемых по уровням вычислялся средний уровневый показатель каждого качества в трехуровневой шкале. Для расчета среднего уровневого показателя применялась формула $\frac{a+2b+3c}{100}$, где a, b, c – процентное соотношение числа испытуемых с низким, средним и высоким уровнем разбираемого свойства соответственно. Дополнительно рассчитан интегральный показатель.

На основании данных таблицы построена гистограмма с группировкой для отображения итоговых диагностических результатов контрольной и экспериментальной групп (рис. 3):

Рис. 3

Статистическая проверка с применением *t*-критерия Стьюдента установила значимые различия в уровне развития предметных знаний у контрольной и экспериментальной групп. Основная проверяемая гипотеза, состоящая в том, что статистических различий между показателями средних двух выборок нет, была отвергнута ($t_{эмп} = 2,29 \geq t_{крит} = 2,003$).

Статистическая проверка с применением χ^2-критерия Пирсона установила различия в уровне развития когнитивных и мотивационных процессов в контрольной и экспериментальной группах (для абсолютных частот признаков).

Основная проверяемая гипотеза, состоящая в том, что различий в уровне развития по отдельным компонентам между контрольной и экспериментальными группами нет, была отклонена ($\chi^2_{эмп} = 6,05 \geq \chi^2_{кр}$ (0,05;2) = 5,99 по компоненту «Мотивация»; $\chi^2_{эмп} = 6,35 \geq \chi^2_{кр}$ (0,05;2) = 5,99 по компоненту «Память»; $\chi^2_{эмп} = 7,11 \geq \chi^2_{кр}$ (0,05;2) = 5,99 по компоненту «Мышление»; $\chi^2_{эмп} = 6,14 \geq \chi^2_{кр}$ (0,05;2) = 5,99 по компоненту «Внимание») Основная проверяемая гипотеза, сформулированная аналогичным образом, была принята для компоненты «Креативность» ($\chi^2_{эмп} = 0,30 \leq \chi^2_{кр}$ (0,05;2) = 5,99).

Исследование показало положительную динамику и статистическую достоверность обозначенных направлений.

Таким образом, проведенное исследование подтверждает предположение о том, что интеллектуальная компьютерная обучающая система по математике может выступать в качестве эффективного средства технологического обеспечения процесса обучения, в том числе за счет формирования индивидуальных траекторий и качественного повышения уровня информатизации образования.

Эффекты, достигаемые с помощью внедрения инновационных программных средств

Приведенный обзор практик применения различных методик обучения математике, а также опытное исследование возможностей интеграции инновационных компьютерных средств обучения в математическое образование средней общеобразовательной школы позволяет сделать вывод об особом значении обучения с применением информационно-телекоммуникационных технологий на современном этапе развития науки и общества [2]. Так, применение «умных» нейросетевых программ в обучении позволяет:

– снизить общий уровень нагрузки педагогического работника;

– интенсифицировать образование и поднять его на принципиально новый уровень;

– провести психолого-педагогическую экспертизу обучающихся;

– рационализировать использование учебного времени в группах с высокой наполняемостью и численностью учащихся;

– увеличить уровень познавательной и творческой активности обучаемых за счет индивидуализации обучения и повышения уровня их самоорганизации;

– автоматизировать анализ различных педагогических данных как по группе обучающихся, так и по каждому из них персонально;

– проводить текущий, рубежный и итоговый контроль;

– применить передовые технологии отображения визуальной и акустической информации;

– повысить эффективность применяемых методов дистанционного обучения.

Принимая во внимание тенденции развития информационно-коммуникационных технологий, можно заключить, что применение технологии машинного обучения имеет большое будущее: от банального выхода в Internet-пространство до укрупнения и объединения с прочими инновационными технологическими решениями. Такой симбиоз программно-аппаратных решений позволит подготовить специалистов, обладающих следующими чертами:

–высокий уровень академических способностей и результатов;

–спокойный, продуманный, обоснованный поиск решений, способов решения той или иной задачи в условиях полной или частичной неопределенности, изменчивости, противоречивости контекста;

–энтузиазм, открытость, стремление к саморазвитию, самосовершенствованию, личностному и карьерному росту;

–умение широко мыслить, проводить многофакторный анализ данных;

–выраженная готовность к творчеству, экспериментам и импровизации, неприятие низкоэффективных шаблонных решений;

–уверенность, подкрепленная способностью осознавать собственные ошибки, безболезненно перестраивать стратегию поведения.;

–тактичность, толерантность, аккуратность в общении с другими людьми.

Сдерживающие факторы интеллектуализации компьютерного обучения

Несмотря на широкие возможности и перспективы применения технологии глубокого машинного обучения, вопрос их внедрения в процессы обучении остаётся открытым [5]. В российской математической школе существуют некоторые особенности внедрения и эксплуатации программного обеспечения в педагогические процессы, а также методику обучения математике, заключенные, в основном, в торможении или отрицании необходимости подобной модернизации как таковой. В качестве факторов, препятствующие широкому продвижению глубокого машинного обучения в различные отрасли науки и техники, в том числе в образование, можно сформулировать:

–сравнительно малое распространение сведений о методах глубоко машинного обучения в российском информационном пространстве;

–сложность, непривычность математической обработки вычислительных процессов;

–низкая заинтересованность со стороны разработчиков массового программного обеспечения;

–моральная закрепощенность и консерватизм общества;

–страх замещения человека электронно-вычислительной машиной, программой.

Заключение

В заключении хотелось бы отметить, что существование методик обучения математике с применением технологии искусственного интеллекта вообще вовсе не означает, что эти методики будут применяться и успешно внедряться в деятельность российских средних общеобразовательных школ. Помимо необходимости непосредственной реализации сложных программных и алгоритмических комплексов, необходимо также личное мотивирование обучающих и обучающихся к их использованию, а также понимание и осознание процедур и принципов их применения в курсе изучения конкретных дисциплин средней общеобразовательной школы. Только выполнение всех этих требований позволит перейти интеллектуальным компьютерным методикам обучения из теоретического состояния в состояние практически применяемых образовательных технологий, и укрепить традиционно сильные позиции российского математического образования в общемировой системе.

Список литературы

1. ГОСТ 15971-90 (1991) Системы обработки информации. Термины и определения – Введ. 1992–01–01. – Москва : Издательство стандартов. – 14 с.;
2. Белоглазов Д.А. (2008) Особенности нейросетевых решений, достоинства и недостатки, перспективы применения // Известия Южного Федерального Университета. Технические науки. – с. 105-110;
3. Бортник Л.И., Кайгородов Е.В., Раенко Е.А. (2013) О некоторых проблемах преподавания математики в высшей школе //Вестник ТГПУ. − № 4 (132);
4. Герасимчук А.В. (2018) Нейросетевые интеллектуальные обучающие системы в процессе освоения в процессе освоения математических дисциплин высшей школы // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. – № 2 (10) – с. 127-136;
5. Герасимчук А.В. (2018) Нейросетевые технологии в образовательном процессе: миф или реальность // Школа молодых ученых по проблемам естественных

наук.– с. 14-19;
6. Горюшкин Е.И. (2009) Использование нейросетевых технологий в адаптивном тестировании по информатике в вузе: дис. к.п.н.- Курск, − 174 с.;
7. Грушевский С.П. (2001) Проектирование учебно-информационных комплексов по математике: дис. д.п.н., Краснодар., – 385 с.;
8. Добровольская Н. Ю. (2009) Компьютерные нейросетевые технологии как средство индивидуализированного обучения студентов физико-математических специальностей: дис. к. п. н. – Краснодар. – 260 с.;
9. Есенбекова А.Э., Джумахметова Л.К., Дусталиева С.М. (2017) Современный подход к преподованию математики в вузе // Аспекты и тенденции педагогической науки: материалы III Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, декабрь 2017 г.). — С. 189-192;
10. Истратова О. Н. (2006) Психодиагностика. Коллекция лучших тестов / О.Н. Истратова, Т. В. Эксакусто. – Ростов-на-Дону: Феникс. – 375 с.;
11. Теория и методика обучения математике: общая методика (2010): учеб. пособие / Е. А. Суховиенко, З. П. Самигуллина, С. А. Севостьянова, Е. Н. Эрентраут. − Челябинск: Изд-во «Образование». − 65 с.;
12. Чванова М.С., Киселева И.А., Молчанов А.А. (2013) Проблемы использования экспертных систем в образовании // Вестник ТГУ. − № 3 (119).

FEATURES OF TEACHING MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL WITH THE USE OF TECHNOLOGIES FOR DEEP MACHINE LEARNING

A.V. Khizhnyak
student
Ana-ger@mail.ru
Yelets

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Bunin Yelets State University»

Abstract. The article deals with modern methods of teaching mathematics at the higher educational, including methods of teaching mathematics using information and telecommunication technologies. The article describes the domestic experience in the development and implementation of training systems based on artificial intelligence technologies, including deep machine learning technologies. The main effects arising in the implementation of methods of teaching mathematics using this technology are described. The structure and operating principles of the specified software are described. Some features of the implementation and functioning of neural network software in the University, as well as methods of teaching mathematics using neural network software, as well as factors that prevent the integration of deep machine learning technology in the pedagogical system of the higher educational.

The paper deals with the current methods of teaching mathematics in secondary school, including methods of teaching mathematics with the use of information and telecommunication technologies. The Russian experience in the development and implementation of training systems based on artificial intelligence technologies (the deep machine learning) is described. The structure and operating principles of the

specified software are described, some features of the implementation and operation of intelligent software in the educational system of secondary school. Described practical experiences with the application of technologies for deep machine learning in mathematical education in the secondary school. Describes the main effects arising from the implementation of methodology of teaching mathematics with the use of this technology. The factors hindering the process of integration of deep machine learning technology in the pedagogical system of the school.

Keywords: methods of teaching mathematics, artificial intelligence, expert systems, information and telecommunication technologies, neural networks, deep machine learning.

References

1. State Standard 15971-90 – 1991. Information processing Systems. Terms and definitions. Moscow, Standards Publishing house. 14 pp. (In Russia);
2. Beloglazov D. A. (2008) Features of neural network solutions, advantages and disadvantages, prospects of application // proceedings of the southern Federal University. Technical science. – p. 105-110;
3. Bortnik L. I., Kaigorodov E. V., Raenko E. A. (2013) On some problems of teaching mathematics in higher school //Vestnik TSPU, № 4 (132);
4. Gerasimchuk A.V. (2018) neural Network intelligent learning systems in the process of development in the process of mastering mathematical disciplines of higher school. CONTINUUM. Mathematics. Informatics. Education. – № 2 (10) – p. 127-136;
5. Gerasimchuk A.V. (2018) Neural Network technologies in the educational process: myth or reality // School of young scientists on problems of natural Sciences.– p. 14-19;
6. Goriushkin E. I. (2009) Application of neural network technology in adaptive testing Eart-Institute for Informatics in high school: dis. PhD - Kursk, - 174 pp.;
7. Grushevsky S. P. (2001) Design of educational and information complexes in mathematics: dis. doctor of pedagogical Sciences, Krasnodar., – 385 pp.;
8. Dobrovolskaya N. Yu. (2009) Computer neural network technologies as a means of indi-vidualized training of students of physical and mathematical specialties: dis. Ph. D. – Krasnodar. 260 pp.;
9. Esenbekova A. E., Dzhumahmatov L. K., S. M. Dostalieva (2017)a Modern approach to the teaching of mathematics in higher education // Aspects and trends of pedagogical science: materials III Intern. science. Conf. (St. Petersburg, December 2017). — p. 189-192;
10. Istratova O. N., Jeksakusto T.V. (2006) Psychological testing. Collection of best tests. – Rostov-on-don: Phoenix. – 375 pp.;
11. Theory and methods of teaching mathematics: General methodology (2010): studies. manual / E. A. Suhovienko, Z. P. Samigullina, S. A. Sevostyanova, E. N. Ehrentraut. − Chelyabinsk: publishing House "Education". − 65 pp;
12. Chvanova M. S., Kiseleva I. A., Molchanov A. A. (2013) Problems of using expert systems in education // Vestnik TSU, № 3 (119).

Научный журнал

C O N T I N U U M

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.

ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск № 2(14) / 2019

Редактор – Н.П. Безногих
Компьютерная верстка и дизайн обложки – М.В. Подаев
Техническое исполнение – В.М. Гришин
Бумага формат А-4 (51 п.л.).
Гарнитура Times. Печать трафаретная
Тираж 1000 экз. Заказ № 62
Подписано в печать 24.06.2019
Дата выхода в свет 25.06.2019
Свободная цена

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-69418 от 14 апреля 2017 г.

Адрес редакции и издателя:
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1
E-mail: pmi.elsu@gmail.com
Сайт редколлегии: http://pmi.elsu.ru

Подписной индекс журнала **№64987** в каталоге периодических изданий
органов научно-технической информации агентства «Роспечать»

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, Липецкая область, г. Елец, Коммунаров, 28,1