МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ И.А. БУНИНА»

CONTINUUM

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск №3(15) / Елец, 2019

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1)

THE FOUNDER AND THE PUBLISHER

The Federal State Educational Government-Financed Institution of Higher Education
«Bunin Yelets State University» (399770, Lipetsk region, Yelets, st. Kommunarov, 28, 1)

THE EDITORIAL BOARD

ISSN 2500-1957

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПЕРСОНАЛИИ

CONTENTS

PROBLEMS AND PROSPECTS OF MODERN MATHEMATICAL EDUCATION

APPLIED ASPECTS OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

PERSONS

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 378.147

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИСТАНЦИОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТНЫХ ПРОЕКТОВ

Виталий Викторович Богун
к.п.н., доцент
vvvital@mail.ru
г. Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Аннотация. Основная цель реализации вузами образовательной деятельности заключается в подготовке студентов к успешному выполнению будущей профессиональной деятельности. Для достижения данной цели у обучаемых должны сформироваться необходимые образовательные компетенции, которые отражаются в виде интеграции определенного конечного множества полученных в процессе обучения знаний, умений, навыков и способностей. К сожалению, применение информационно-коммуникационных технологий в обучении дисциплинам естественнонаучного цикла, в том числе и математике, подразумевает зачастую выполнение студентами в системах компьютерной математики автоматизированных расчетов в сочетании с наглядной визуализацией исходных данных и получаемых результатов, а также статических тестов в рамках систем дистанционного обучения. Однако для формирования навыков и способностей, которые напрямую влияют на получение студентами определенных образовательных компетенций, необходимо самостоятельное выполнение учащимися дистанционных динамических расчетных объектов. Исследование математических объектов учащимися в рамках расчетных проектов рассматривается в ракурсе выполнения студентами комплексных расчетных алгоритмов и проверки полученных числовых значений промежуточных и итоговых результатов вычислений на основе варьирования значений исходных данных. Разработанная автором и активно внедряемая в процесс обучения математике дистанционная система динамических расчетных проектов позволяет полностью ликвидировать данный недостаток, поскольку студентам вузов представляются возможности выполнения сложных расчетных проектов на основе случайно генерируемых информационной системой значений исходных данных с постоянным автоматизированным мониторингом студентом и преподавателем указываемых учащимся значений промежуточных и итоговых результатов вычислительных алгоритмов с возможностями их многократной корректировки.

Ключевые слова: информационно-коммуникационные технологии, процесс обучения математике, образовательные компетенции, системы дистанционного обучения, дистанционные динамические расчетные проекты.

Основной целью организации процесса обучения студентов вузов при изучении дисциплин естественнонаучного цикла в целом и математики в частности, согласно требованиям ФГОС, является формирование и развитие у обучаемых определенных образовательных компетенций, которые отражают взаимосвязанный комплекс знаний, умений, навыков и способностей, необходимый для решения профессионально-ориентированных и прикладных задач. Для успешной реализации учебного процесса у студентов должны формироваться мотивы обучения, которые являются основной движущей силой для познания окружающей действительности через призму математики и других естественнонаучных дисциплин [9, 10].

Необходимым условием эффективной образовательной деятельности студентов вузов является также полноценное формирование и последующее развитие теоретического и практического мышления, которые отвечают за освоение студентами знаний теоретических основ и получение умений и навыков для решения практических, в том числе прикладных и профессионально-ориентированных задач соответственно [6, 7]. Теоретическое мышление отвечает за формирование у студентов теоретических знаний в виде совокупности понятий и законов во время проведения преподавателем лекционных аудиторных занятий, тогда как практическое мышления отвечает за формирование и непрерывное развитие у студентов вузов необходимых для решения профессионально-ориентированных и прикладных задач в процессе проведения под руководством преподавателя практических и лабораторных аудиторных занятий.

Всестороннее использование информационно-коммуникационных технологий в учебном процессе вузов при организации аудиторных лекционных, практических и лабораторных занятий конечно приводит к формированию у студентов определенных образовательных компетенций, выражаемых в виде взаимосвязанного комплекса знаний, умений, навыков и способностей, остается на низком уровне в силу малой доли реализации учащимися самостоятельной деятельности с применением цифровых технологий.

Поэтому для полноценного формирования и развития у студентов теоретического и практического мышлений, которые напрямую отвечают за эффективность образовательного процесса, преподавателем предлагается составление рефератов по определенной тематике дисциплины на основе полученной из дополнительной литературы и Интернет-источников информации, и решение обучаемыми практических задач в рамках домашней или контрольной домашней работы или в процессе реализации курсовых проектов.

Однако по причинам отсутствия возможности самостоятельного составления студентами оптимального плана распределения свободного от аудиторных занятий времени, неуверенности в правильности решения задач с точки зрения корректности получаемых значений результатов вычислений и оптимальности выбора алгоритмов решения задач, эффективность внеаудиторной самостоятельной деятельности студентов остается на низком уровне.

Для повышения эффективности самостоятельной деятельности студентов вузов при изучении дисциплин естественнонаучного цикла в целом и математике в частности рекомендуется активно применять преподавателями в рамках учебного процесса определенную систему из комплексных расчетных проектов. При реализации учащимися системы проектов на основе полученных индивидуальных значений параметров исходных данных необходимо выполнять взаимосвязанные расчетные процедуры на основе интеграции различных видов алгоритмов для получения и наглядного представления значений определенных промежуточных и итоговых результатов проекта.

В настоящее время организация процесса обучения студентов вузов дисциплинам естественнонаучного цикла сопровождается активным применением информационно-коммуникационных технологий с целью исследования различных объектов в рамках реализации наглядного моделирования исследуемых процессов или явлений. Дистанционные технологии, как один из основных видов образовательных технологий, представляют широкие возможности для получения качественного образования. Качество получаемых учащимися теоретических знаний, практических умений и навыков особенно сильно влияет на повышение интереса обучаемых к учебному процессу, развитие их теоретического и практического мышления и успешное решение образовательных, практико-ориентированных и прикладных задач по дисциплинам естественнонаучного цикла в целом и по математике в частности.

Имеющиеся на сегодняшний день системы дистанционного обучения («Прометей», «WebTutor», «Moodle» и т.д.) позволяют реализовывать самостоятельную работу школьников и студентов по четырем основным составляющим (ознакомление учащихся с теоретическим материалом, представленном в виде электронного учебника; тестирование студентов по заранее полностью составленным вручную преподавателем вопросам и соответствующим вариантам ответов к каждому из них; общение в рамках форумов или гостевых книг; возможность экспорта-импорта файлов документов пользователя) [1, 8]. Однако при изучении дисциплин естественнонаучного цикла для проведения промежуточного и итогового контроля знаний, умений, навыков и способностей обучающихся целесообразно применять динамические расчетные проекты с формированием определенного количества значений исходных данных и необходимых для указания обучаемым значений промежуточных и итоговых результатов вычислений.

Выполнение студентами вузов в дистанционном формате динамических расчетных проектов по математике и другим дисциплинам естественнонаучного цикла способствует полноценному формированию у обучаемых необходимых для успешной реализации будущей профессиональной деятельности образовательных компетенций в виде взаимосвязанного комплекса знаний, умений, навыков и способностей учащихся [1; 2].

Разработанная автором информационная система базируется на использовании принципа «программа в программе», суть которого заключается в реализации системы динамических расчетных проектов, необходимые составляющие которых представляются в виде самостоятельных программных модулей с применением сложных расчетных алгоритмов, которые компилируются основной оболочкой или ядром информационной системы.

Преимущество данной информационной системы заключается в возможности организации дистанционной самостоятельной работы студентов вузов в форме выполнения учащимися динамических расчетных проектов, суть которых состоит в автоматической генерации обучаемыми значений исходных данных, выполнении студентами необходимых расчетных алгоритмов, указании учащимися значений результатов с возможностью их многократной проверки информационной системой и редактирования, а также возможностями полноценного автоматизированного мониторинга выполняемых студентами расчетных проектов преподавателем и учащимися.

Организация учебного процесса с использованием дистанционной системы динамических расчетных проектов осуществляется согласно следующему алгоритму:

1. Преподавателем формулируются необходимые дидактические составляющие учебного процесса в соответствии с тематикой разрабатываемых динамических расчетных проектов: описание курса в рамках учебной дисциплины, расчетных проектов в рамках каждого курса, а также по работам в рамках расчетных проектов с последующим их отражением в рамках информационной системы.

2. Преподавателем или администратором совместно с преподавателем осуществляется разработка необходимых расчетных алгоритмов и программных модулей, используемых для решении задач в рамках расчетных работ проекта с точки зрения определенной учебной дисциплины с последующим их отражением в рамках информационной системы.

3. Преподавателем и студентами осуществляется генерирование независимых вариантов демо-версий рассматриваемой расчетной работы для преподавателя и студента с возможностями взаимного просмотра демо-версий. Генерация значений исходных данных и автоматический расчет значений промежуточных и итоговых результатов вычислений осуществляется ядром информационной на основе анализа исходного кода программного модуля реализации расчетной работы.

4. Индивидуально каждым из студентов в рамках собственного виртуального пространства осуществляется вызов процедуры генерации ядром информационной системы значений исходных данных соответствующего варианта расчетной работы в рамках расчетного проекта с использованием случайных чисел в соответствии с исходным кодом программного модуля решения задач работы.

5. Преподавателем может осуществляться просмотр указываемых учащимися значений промежуточных и итоговых результатов выполняемой студентом расчетной работы, при этом для самого студента предоставляются широкие возможности для просмотра правильно введенных значений, просмотра и редактирования указанных ранее неправильных значений промежуточных и итоговых результатов расчетной работы.

6. Реализуется мониторинг выполнения обучаемым расчетной работы в рамках соответствующего расчетного проекта с точки зрения преподавателя и студента для проведения анализа эффективности выполнения студентом расчетной работы и формированием дальнейшей стратегии реализации текущей проектной деятельности.

На рис. 1 представлена логическая схема реализации дистанционной системы динамических расчетных проектов, согласно которой осуществляется активация виртуального пространства для преподавателя или студента. Внешнее виртуальное пространство используется для оперирования атрибутами пользователя без активации расчетных проектов и работ в рамках учебного курса, тогда как внутреннее виртуальное пространство применяется для реализации самостоятельной деятельности пользователя [1-4].

Реализация образовательной деятельности студентов и педагога в рамках внутреннего виртуального пространства осуществляется с использованием системы меню на основе применения вкладок для каждого уровня реализации расчетных проектов. В частности, выделяется четыре уровня меню с вкладками: содержимое курса в рамках учебной дисциплины, расчетного проекта в рамках учебного курса, расчетной работы в рамках проекта и индивидуальной деятельности студентов в рамках расчетной работы (список демо-версий работы студента, работа студента (в режиме преподавателя допускается только просмотр значений результатов расчетов, в режиме студента осуществляется просмотр корректно рассчитанных значений результатов, просмотр и редактирование неправильно указанных ранее значений результатов с целью их корректировки) и результаты студента).

Порядок работы студента в информационной системе состоит из следующих этапов:

1. Студент на основании исходного кода программного модуля динамического расчетного проекта получает задание, которое может быть одинаковым для всех студентов, но значения исходных данных формируются с использованием генератора случайных чисел при соблюдении определенных условий, что позволяет сделать задание индивидуальным (рис. 2).

2. Программное обеспечение информационной системы в автоматическом режиме производит необходимые расчеты, получает правильные ответы для промежуточных и итоговых данных и сохраняет их в базе данных.

3. Обучающийся самостоятельно производит расчеты согласно сформированному заданию расчетного проекта и указывает значения полученных промежуточных и итоговых результатов в соответствующие текстовые поля (рис. 3).

4. Информационная система проверяет соответствие рассчитанных студентом значений результатов данным, которые были автоматически получены системой (рис. 4). Если ответ студента неправильный, то студент может неоднократно исправлять и проверять значения рассчитанных значений результатов расчетов (рис. 5, 6) с целью выполнения динамического расчетного проекта целиком.

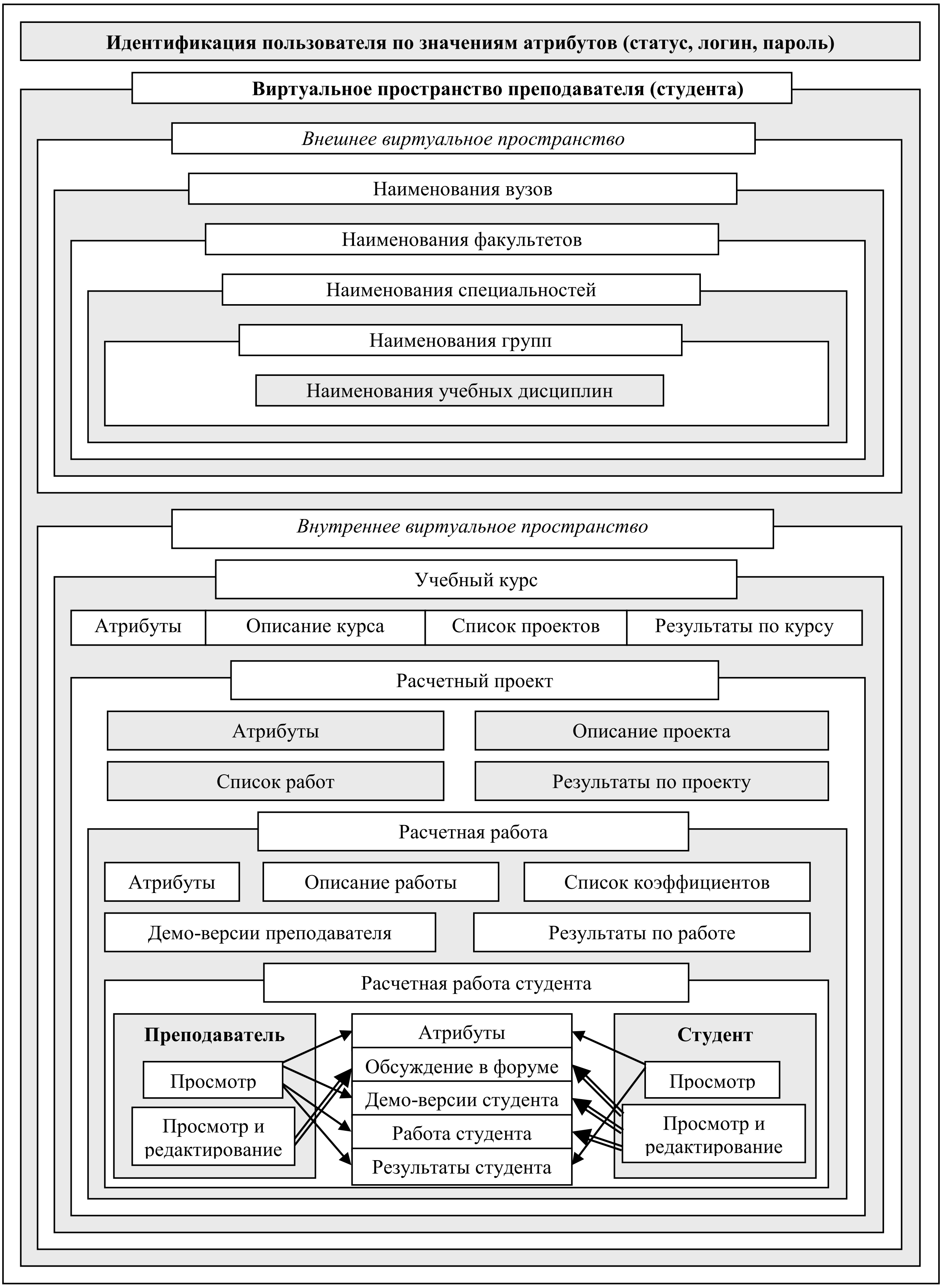
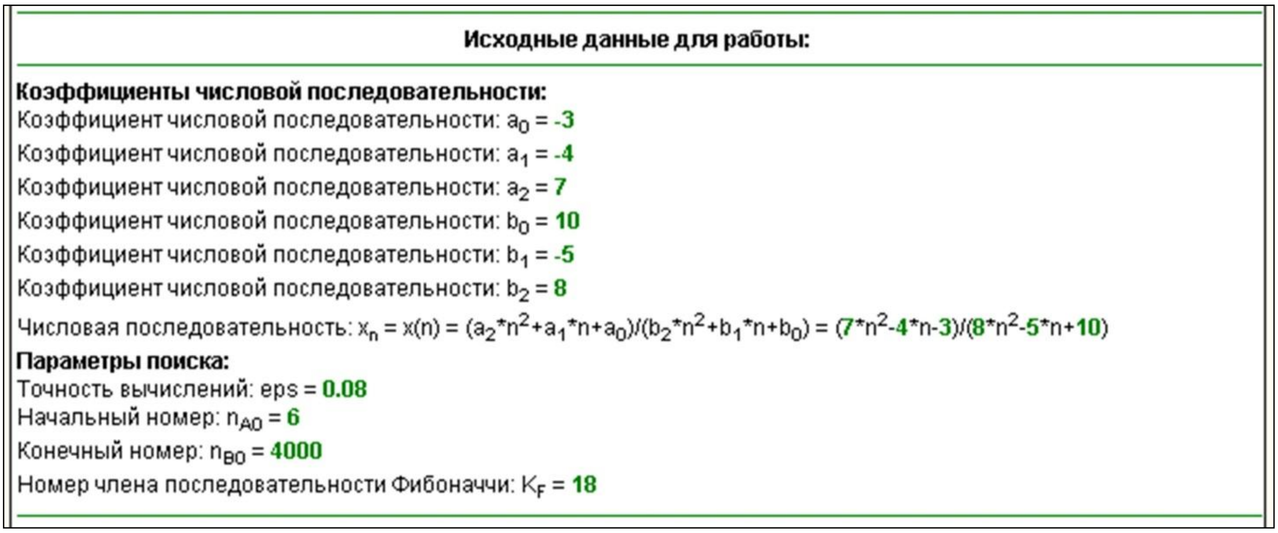


Рис. 1. Логическая структура программной реализации дистанционной системы динамических расчетных проектов

С точки зрения реального внедрения дистанционной системы динамических расчетных проектов в процесс обучения студентов вузов дисциплинам естественнонаучного цикла в целом и математике в частности информационную систему необходимо применять на всех этапах изучения определенного раздела или темы.

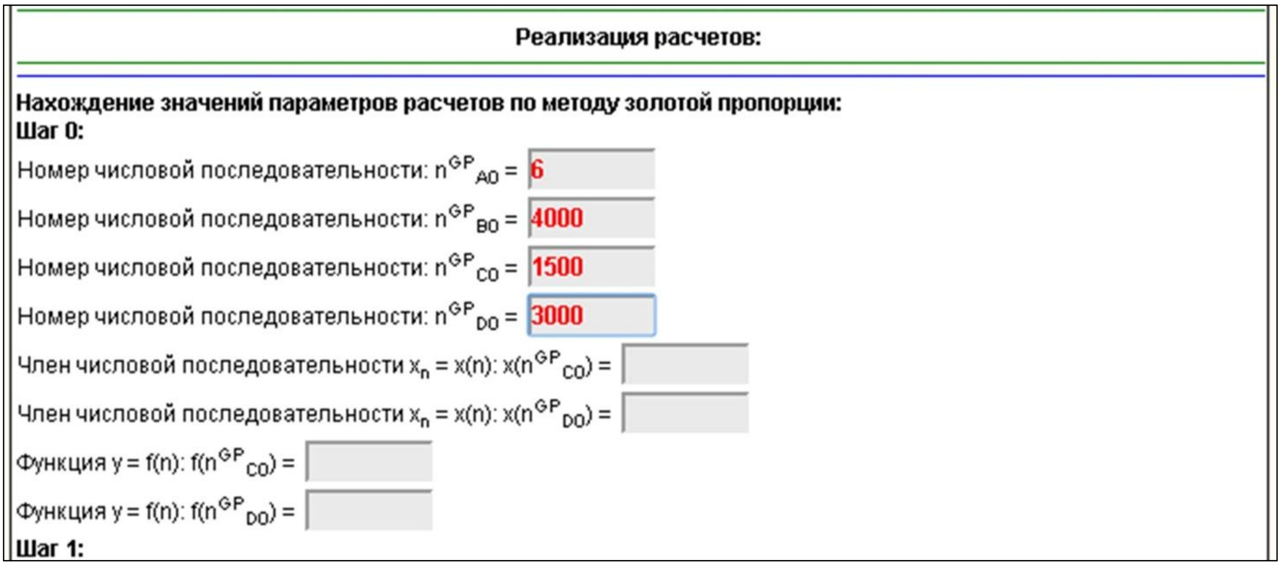
В частности, при проведении аудиторных занятий на лекциях целесообразно рассмотрение преподавателем со студентами теоретического материала в рамках описания учебного курса, расчетных проектов и работ, тогда как на практических занятиях необходимо осуществлять генерирование, активацию, изучение и проведение сравнительного анализа демо-версий расчетных работ как для преподавателя, так и для студента, с необходимыми комментариями. Также на практических занятиях целесообразно проводить сравнительный анализ результативности выполнения студентами расчетных работ с необходимыми консультациями.



Исходные данные для работы:

Коэффициенты числовой последовательности:
Коэффициент числовой последовательности: $a_0 = -3$
Коэффициент числовой последовательности: $a_1 = -4$
Коэффициент числовой последовательности: $a_2 = 7$
Коэффициент числовой последовательности: $b_0 = 10$
Коэффициент числовой последовательности: $b_1 = -5$
Коэффициент числовой последовательности: $b_2 = 8$
Числовая последовательность: $x_n = x(n) = (a_2*n^2+a_1*n+a_0)/(b_2*n^2+b_1*n+b_0) = (7*n^2-4*n-3)/(8*n^2-5*n+10)$
Параметры поиска:
Точность вычислений: eps = 0.08
Начальный номер: $n_{A0} = 6$
Конечный номер: $n_{B0} = 4000$
Номер члена последовательности Фибоначчи: $K_F = 18$

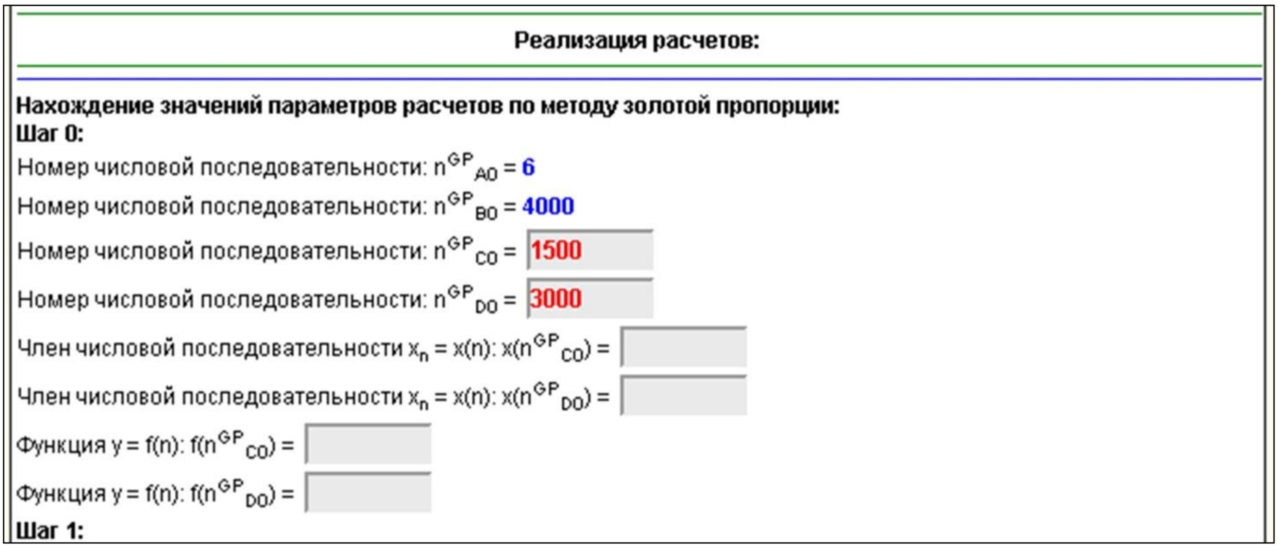
Рис. 2. Формирование системой значений исходных данных.



Реализация расчетов:

Нахождение значений параметров расчетов по методу золотой пропорции:
Шаг 0:
Номер числовой последовательности: $n^{GP}{}_{A0} =$ 6
Номер числовой последовательности: $n^{GP}{}_{B0} =$ 4000
Номер числовой последовательности: $n^{GP}{}_{C0} =$ 1500
Номер числовой последовательности: $n^{GP}{}_{D0} =$ 3000
Член числовой последовательности $x_n = x(n)$: $x(n^{GP}{}_{C0}) =$
Член числовой последовательности $x_n = x(n)$: $x(n^{GP}{}_{D0}) =$
Функция $y = f(n)$: $f(n^{GP}{}_{C0}) =$
Функция $y = f(n)$: $f(n^{GP}{}_{D0}) =$
Шаг 1:

Рис. 3. Указание студентом значений результатов.



Реализация расчетов:

Нахождение значений параметров расчетов по методу золотой пропорции:
Шаг 0:

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{A0} = 6$

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{B0} = 4000$

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{C0} =$ 1500

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{D0} =$ 3000

Член числовой последовательности $x_n = x(n)$: $x(n^{GP}_{C0}) =$

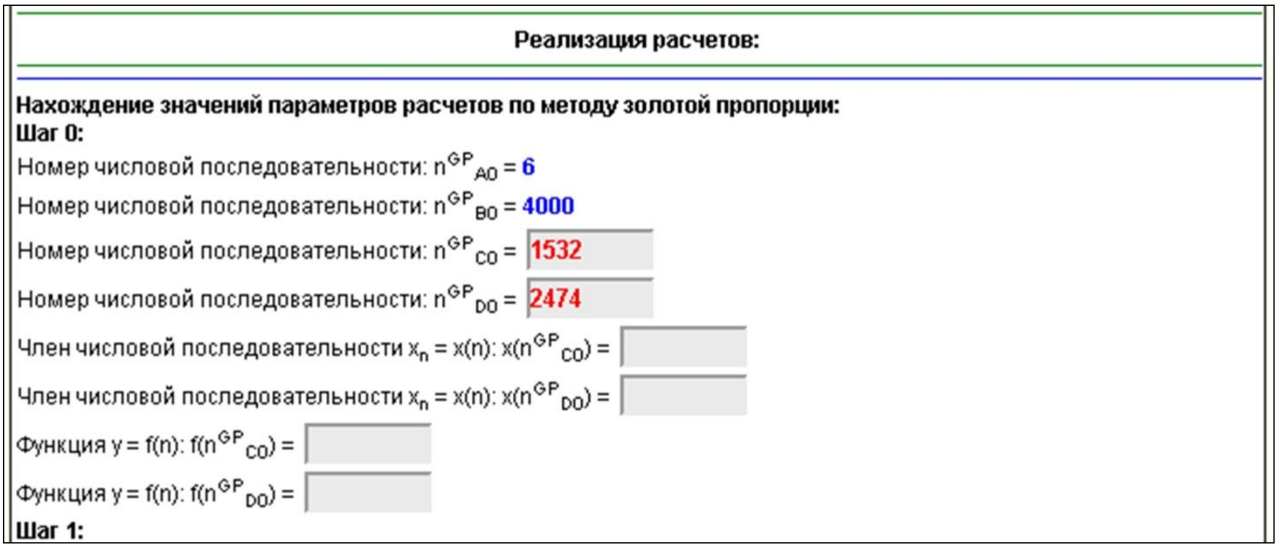
Член числовой последовательности $x_n = x(n)$: $x(n^{GP}_{D0}) =$

Функция $y = f(n)$: $f(n^{GP}_{C0}) =$

Функция $y = f(n)$: $f(n^{GP}_{D0}) =$

Шаг 1:

Рис. 4. Проверка системой значений результатов.



Реализация расчетов:

Нахождение значений параметров расчетов по методу золотой пропорции:
Шаг 0:

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{A0} = 6$

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{B0} = 4000$

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{C0} =$ 1532

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{D0} =$ 2474

Член числовой последовательности $x_n = x(n)$: $x(n^{GP}_{C0}) =$

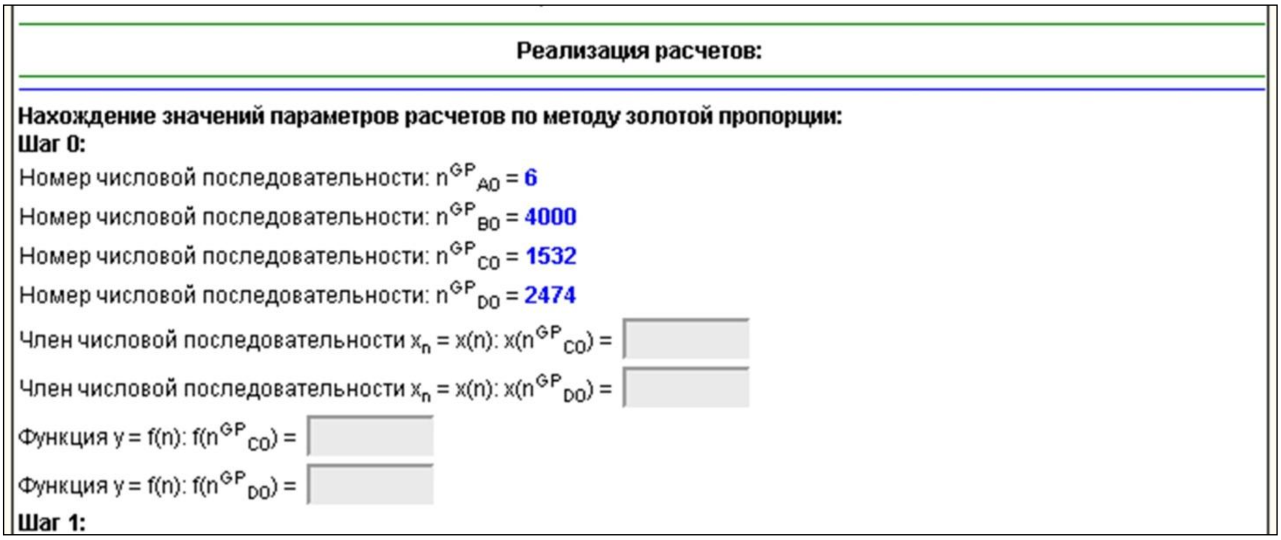
Член числовой последовательности $x_n = x(n)$: $x(n^{GP}_{D0}) =$

Функция $y = f(n)$: $f(n^{GP}_{C0}) =$

Функция $y = f(n)$: $f(n^{GP}_{D0}) =$

Шаг 1:

Рис. 5. Изменение студентом неправильных значений результатов.



Реализация расчетов:

Нахождение значений параметров расчетов по методу золотой пропорции:
Шаг 0:

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{A0} = 6$

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{B0} = 4000$

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{C0} = 1532$

Номер числовой последовательности: $n^{GP}_{D0} = 2474$

Член числовой последовательности $x_n = x(n)$: $x(n^{GP}_{C0}) =$

Член числовой последовательности $x_n = x(n)$: $x(n^{GP}_{D0}) =$

Функция $y = f(n)$: $f(n^{GP}_{C0}) =$

Функция $y = f(n)$: $f(n^{GP}_{D0}) =$

Шаг 1:

Рис. 6. Проверка системой измененных значений результатов.

Разработанная автором дистанционная система динамических расчетных проектов позволяет организовать самостоятельную деятельность студентов вузов через призму выполнения учащимися в дистанционном формате динамических расчетных заданий. Суть деятельности состоит в следующем: в автоматической генерации информационной системой значений исходных данных; в выполнении студентами необходимых комплексных расчетов с указанием значений параметров промежуточных и итоговых результатов с возможностью многократного редактирования значений; в реализации дистанционной системой сравнительного анализа указываемых студентами значений расчетных параметров с автоматически рассчитанными информационной системой значениями коэффициентов промежуточных и итоговых результатов вычислений, полученных на основе применения необходимых расчетных программных алгоритмов.

Список литературы

1. Богун В.В. Реализация расчетных проектов при организации дистанционного обучения математике // Компьютерные инструменты в образовании. 2011. № 6. С.33-37.
2. Богун В.В. Применение дистанционных учебных проектов при обучении математике // Высшее образование в России. 2013. № 5. С.114-119.
3. Богун В.В. Математическая логика программных особенностей реализации системы мониторинга дистанционных учебных проектов // Ярославский педагогический вестник. 2010. № 2. С.22-33.
4. Богун В.В. Информационные особенности динамической системы мониторинга дистанционных расчетных проектов // Ярославский педагогический вестник. 2011. № 1. С. 185-193.
5. Богун В.В. Дистанционные динамические расчетные проекты по исследованию функций вещественного переменного: учебное пособие. Ярославль: Изд-во «Канцлер». 2014.
6. Двоткина С.Н., Дякина А.А., Розанова С.А. Синергия гуманитарного и математического знания как педагогическое условие решения междисциплинарных проблем // Интеграция образования. 2017. № 1 (86). С. 8-16.
7. Дворяткина С.Н., Розанова С.А. Разработка интегративных курсов на основе синергетического подхода при решении профессиональных и прикладных задач // Ярославский педагогический вестник. Сер. «Психолого-педагогические науки». 2016. № 6. С. 127-131.
8. Кузнецов А.А., Богун В.В., Смирнов Е.И. Проблемы и перспективы реализации единой среды дистанционного обучения студентов педагогических вузов // Информатика и образование. 2010. №7. С.74-82.
9. Смирнов Е.И. , Богун В.В., Уваров А.Д. Синергия математического образования: Введение в анализ: монография. Ярославль, изд-во «Канцлер», 2016.
10. Смирнов Е.И., Смирнов Н.Е., Уваров А.Д. Этапы технологического сопровождения процесса самоорганизации в математическом образовании будущего педагога // Ярославский педагогический вестник. 2017. № 3. С. 102-110.

THE ORGANIZATION OF PROCESS OF TRAINING IN MATHEMATICS WITH APPLICATION OF REMOTE DYNAMIC SETTLEMENT PROJECTS

V.V. Bogun
Dr. Sci. (Pedagogy), associate professor
vvvital@mail.ru
Yaroslavl

Yaroslavl State Pedagogical University after K.D. Ushinsky

Abstract. The main purpose of the educational activities implemented by universities is to prepare students for the successful performance of future professional activities. For achievement of this purpose at trainees necessary educational competences which are reflected in the form of integration of a certain final set of knowledge gained in the course of training, abilities, skills and abilities have to be created. Unfortunately, the use of information and communication technologies in teaching science disciplines, including mathematics, often implies that students perform automated calculations in computer mathematics systems, combined with visual visualization of initial data and results, as well as static tests within distance learning systems. However, in order to develop skills and abilities that directly affect students 'acquisition of certain educational competences, students must independently perform remote dynamic calculation objects. The study of mathematical objects by students within the framework of calculation projects is considered in the view of students performing complex calculation algorithms and checking the obtained numerical values of intermediate and final results of calculations on the basis of variation of values of initial data. The remote system of dynamic calculations of projects developed by the author and actively introduced into the process of mathematics training makes it possible to completely eliminate this disadvantage, as students of universities are presented with opportunities to carry out complex calculation projects on the basis of random values of initial data generated by the information system with constant automated monitoring of values of intermediate and final results of computational algorithms indicated to students by the student and teacher, with possibilities of their repeated correction.

Keywords: information and communication technologies, process of training in mathematics, educational competences, systems of distance learning, remote dynamic settlement projects.

References

1. Bogun, V.V. (2011) Implementation of settlement projects at the organization of distance learning to mathematics [*Realizaciya raschetnyh proektov pri organizacii distancionnogo obucheniya matematike*]. *Computer tools in education.* V. 6. Pp. 33-37.
2. Bogun, V.V. (2013) Application of remote educational projects when training in mathematics [*Primenenie distancionnyh uchebnyh proektov pri obuchenii matematike*]. *Higher education in Russia.* V. 5. Pp.114-119.
3. Bogun, V.V. (2010) Mathematical logic of program features of realization of a system of monitoring of remote educational projects [*Matematicheskaya logika programmnyh osobennostej realizacii sistemy monitoringa distancionnyh uchebnyh proektov*]. *Yaroslavl pedagogical bulletin.* V. 2. Pp.22-33.
4. Bogun, V.V. (2011) Information features of a dynamic system of monitoring of remote settlement projects [*Informacionnye osobennosti dinamicheskoj sistemy monitoringa distancionnyh raschetnyh proektov*]. *Yaroslavl pedagogical bulletin.* V. 1. Pp. 185-193.

5. Bogun, V.V. (2014) Remote dynamic settlement projects on a research of functions of material variable: manual [*Distancionnye dinamicheskie raschetnye proekty po issledovaniyu funkcij veshchestvennogo peremennogo: uchebnoe posobie*]. *Yaroslavl: Kantsler publishing house.*
6. Dvoryatkina, S.N., Dyakina, A.A., Rozanova, S.A. (2017). Synergy of humanitarian and mathematical knowledge as pedagogical condition of the solution of cross-disciplinary problems [*Sinergiya gumanitarnogo i matematicheskogo znaniya kak pedagogicheskoe uslovie resheniya mezhdisciplinarnyh problem*]. *Integration of education.* V. 1 (86). Pp.8-16.
7. Dvoryatkina, S.N., Rozanova, S.A. (2016). Development of integrative courses on the basis of synergetic approach at the solution of professional and applied [*Razrabotka integrativnyh kursov na osnove sinergeticheskogo podhoda pri reshenii professional'nyh i prikladnyh zadach*]. *Yaroslavl pedagogical bulletin. It is gray. "Psychology and pedagogical sciences".* V. 6. Pp. 127-131.
8. Kuznetsov, A.A., Bogun, V.V., Smirnov, E.I. (2010). Problems and prospects of realization of the uniform environment of distance learning of students of pedagogical higher education institutions [*Problemy i perspektivy realizacii edinoj sredy distancionnogo obucheniya studentov pedagogicheskih vuzov*]. *Information scientist and education* . V. 7. Pp.74-82.
9. Smirnov E.I., Bogun V.V., Uvarov A.D. (2016). Synergy of mathematical education: Introduction to the analysis [*Sinergiya matematicheskogo obrazovaniya: Vvedenie v analiz*]. *Yaroslavl: Kantsler publishing house.*
10. Smirnov, E.I., Smirnov, N.E., Uvarov, A.D. (2017). Stages of technological maintenance of process of self-organization in mathematical education of future teacher [*Etapy tekhnologicheskogo soprovozhdeniya processa samoorganizacii v matematicheskom obrazovanii budushchego pedagoga*]. *Yaroslavl pedagogical bulletin.* V. 3. Pp.102-110.

УДК 373.51

О ПРЕОДОЛЕНИИ НЕКИХ СТЕРЕОТИПОВ В ОБОЗНАЧЕНИЯХ И ТЕРМИНОЛОГИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И НАЧАЛ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Александр Борисович Будак
к.ф.м.н., доцент
e-mail abbudak@cs.msu.su
г. Москва

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра общей математики

Аннотация. В данной статье содержатся важные, на взгляд автора, предложения об использовании обозначений и применении терминов в теории и задачах элементарной и начал высшей математики. Предлагается дополнить, уточнить и сделать более последовательными использование терминологий в элементарных алгебре, тригонометрии и геометрии, математическом анализе, высшей алгебре и аналитической геометрии и других математических дисциплинах.

Ключевые слова: стереотипы, длина отрезка, величина угла, знаки включения, скалярное и векторное произведения векторов, эллипс, гипербола, парабола, комплексное число.

Остановимся кратко на проблемах, на которые недостаточно обращают внимание многие авторы учебников и учебных пособий по элементарной математике и началам высшей математики.

Об этих проблемах автор неоднократно докладывал на различных конференциях: в г. Чебоксары 2011 и 2013 годов, ISAAK – конгрессе в Москве 2011 г., конференциях НМС по математике: «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство», Армения 2011, 2014, 2015 гг.

Автору часто приходится обращать внимание своих коллег, публикующих разного рода книги и брошюры по элементарной математике, многих авторов, присылающих в НМС по математике рукописи, как по вопросам элементарной математики, так и по началам высшей математики, претендующих на тот или иной гриф, на все эти проблемы.

Очень часто наблюдаются серьезные неточности в изложении ряда математических вопросов, причем довольно удивительно, что многие авторы действительно следуют сложившимся стереотипам или явно ошибочным, или содержащим завуалированные некорректности. Печально, что все это часто выдается за истину в последней инстанции, и авторы порой совершенно не обращают внимание на разного рода математические тонкости.

Остановимся на следующих примерах только что сказанного.

1. В определениях скалярного и векторного произведений двух геометрических векторов часто не учитывается то, что один или оба вектора могут оказаться нулевыми, а потому угол между ними и его величина не определены, помимо этого, говоря о правой или левой тройке векторов, порой забывается, что все эти векторы должны быть ненулевыми. На наш взгляд более корректными являются следующие определения.

Определение 1. Скалярным произведением свободных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число 0, если хотя бы один из этих векторов нулевой и произведение длин этих векторов на косинус величины угла φ между ними, (обозначается величина угла между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ $(a\hat{;}b)$) если они оба ненулевые. При этом угол между векторами определен только, *если они оба ненулевые.*

Если эти векторы приведены к общему началу О: $\boldsymbol{a} = \vec{OA}$, $\boldsymbol{b} = \vec{OB}$, то угол между ними это угол между лучами ОА и ОВ, его *величина* φ (в радианной мере) изменяется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$, скалярное произведение векторов ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) в случае ненулевых векторов следует записывать в виде $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi$ или $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(a\hat{;}b)$ $(\varphi = (a\hat{;}b))$.

Определение 2. Векторным произведением свободных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется нулевой вектор $\boldsymbol{c}$ ($\boldsymbol{c} = \mathbf{o}$), если хотя бы один из них является нулевым вектором, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ненулевые, то вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий *условиям*:

1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi$ или $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(a\hat{;}b)$ $(\varphi = (a\hat{;}b))$;

2) вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$);

3) если вектор $\boldsymbol{c}$ – ненулевой ($\boldsymbol{c} \neq \mathbf{o}$), то упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — правая (правой ориентации).

Обозначается векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ или $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Отметим, что в случае **правой** ориентации тройки векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, которые сонаправлены соответственно с большим (первым), указательным (вторым) и средним (третьим) пальцами *правой* руки, если смотреть с конца третьего пальца на плоскость первого и второго пальцев, то кратчайший поворот от первого пальца ко второму осуществляется *против часовой стрелки*, а в случае **левой** ориентации тройки векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, которые сонаправлены соответственно с большим, указательным и средним пальцами *левой* руки, если смотреть с конца третьего пальца на плоскость первого и второго пальцев, то кратчайший поворот от первого пальца ко второму осуществляется *по часовой стрелке.*

Приведенные, например, в [3] и [4] определения 1 и 2 являются корректными.

2. В определениях кривых второго порядка на плоскости: эллипса, гиперболы, параболы часто не указывается, что: в случае эллипса сумма расстояний от каждой его точки до фокусов должна быть больше расстояния между фокусами; в случае гиперболы модуль разности расстояний от каждой ее точки до фокусов есть величина положительная, причем меньшая расстояния между фокусами; в случае параболы фокус не должен лежать на директрисе. А ведь тогда соответственно под определение эллипса попадает обычный отрезок прямой, под определение гиперболы может попасть прямая и даже плоскость, перпендикулярные отрезку и проходящие через его середину, и объединение двух лучей одной прямой, не имеющих общих точек, под определения параболы — прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через лежащей на ней фокус.

Сформулированные в [3] и [4] "словесные" определения кривых второго порядка корректные в плане четкого соответствия их геометрическим образам. Однако многие авторы предпочитают давать определения кривых второго порядка как множества точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неким уравнениям второй степени с двумя переменными, содержащим некие параметры. При этом, порой забывая подчеркнуть, что данным уравнениям удовлетворяют координаты исключительно указанных точек в определенным образом выбранной системе координат, да и потом, пытаясь переводить эти определения на "словесные" забывают оговорить указанные выше важные условия, которые, правда, могут вытекать как из вида уравнений, так и ограничений на указанные параметры

3. Во многих задачах элементарной геометрии часто смешиваются понятия отрезка и его длины, угла и его величины, хотя отрезок и угол – геометрические объекты, состоящие из определенных типов множеств точек, а длины и величины – их числовые характеристики (по сути числа), определенным образом вводимые и обладающие некими "базовыми" свойствами. Можно доказать корректность их введения.

Дело доходит до того, что в одном и том же варианте вступительного испытания по математике в вуз и даже в тексте одной геометрической задачи присутствуют, например, обороты типа "длина отрезка равна 3" и "отрезок равен 5" (см. ниже пример Ж)).

При том, что в векторной алгебре практически везде вектор (направленный отрезок) и его длина четко различаются, как, по сути, так и в обозначениях.

Интересно проанализировать примеры формулировок текстов геометрических задач вступительных экзаменов в период с 1977 по 1984 годы, когда основными школьными учебниками по геометрии были учебники под редакцией А.Н. Колмогорова. Тексты задач заимствованы из книги [2]. К некоторым из них приводятся подробные решения с характерной терминологией, четко различающей понятия отрезка и его длины, угла и его величины (правда, авторы в отдельных местах от этой традиции иногда все же отходят, создавая, тем самым, некую непоследовательность рассуждений).

А) <u>МГУ, Мехмат 1977 № 2</u>

Длины боковых сторон трапеции ABCD (AD || BC) равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на два четырехугольника, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции. Ответ: |AD|=7, |BC|=1.

Б) <u>МГУ, Мехмат 1977 № 5</u>

Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через вершину S и середину ребра CB, а другая проходит через вершину C и середину ребра AB.

Ответ: $\pi / 4,\ 2 / \sqrt{3}$.

В) <u>МГУ, Мехмат 1979 № 3</u>

Отрезок AB является диаметром некоторой окружности. Через его концы A и B проведены две прямые, пересекающие окружность в точках C и D, лежащих по одну сторону от прямой (AB). Точка O, в которой пересекаются эти прямые, равноудалена от концов диаметра AB. Найти радиус окружности, если |CD| = 1 и $O\hat{C}D = \pi / 3$ (заметим: не CD=1 и $\angle$OCD = π / 3). Ответ: R = 1.

Г) МГУ, Мехмат 1980 № 2

В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из ее оснований имеют величины 40° и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

Ответ: длины оснований трапеции равны 5 и 3 (вполне допустимы и "словесные" ответы).

Однако примерно с середины 1980-х годов после перехода от основных учебников геометрии под редакцией А.Н. Колмогорова к учебнику А.В. Погорелова произошло, с одной стороны, возвращение к более простой терминологии (замененное в учебниках геометрии равенство фигур на "конгруэнтность" снова стало "равенством"). К сожалению, А.В. Погореловым были или удалены из ранее написанных им пособий для учителей многие важные дополнительные теоремы (например, о пересечении двух медиан (как отрезков) и двух биссектрис (как отрезков) треугольника, двух диагоналей (как отрезков) параллелограмма), или не возвращены в основной текст учебника некоторые теоремы, которые были удаленны из текста учебников А.П. Киселева в тексте учебников под ред. А.Н. Колмогорова (например, о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и круге, о квадрате длины отрезка касательной к окружности). И снова стали смешиваться понятия отрезка и его длины, угла и его величины, и резко усилился "разнобой" использования этих понятий в задачах вступительных экзаменов по математике в вузы. Остановимся на некоторых и этих примерах. Подробнее см. [4].

Варианты вступительных испытаний в МГУ 2010 г. (вместо ЕГЭ).

Д) Стороны треугольника равны 3, 5, 7. Найти величину наибольшего угла треугольника. (Терминология "смешанная"). Ответ: 120° или $2\pi / 3$.

Е) Параллелограмм, одна из сторон которого равна 3, описан около окружности радиуса 1. Найти площадь параллелограмма. (Терминология "смешанная", под радиусом понимается число — расстояние от центра окружности до любой из ее точек). Ответ: 6.

Ж) В основании правильной пирамиды ABCDS лежит квадрат со стороной 6. Через середины ребер AD, BC, и CS проведена плоскость. Найти периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если длины боковых ребер равны 7. (Терминология "смешанная") Ответ: 16.

З) Найти площадь треугольника ABC, если его сторона BC равна 4, а углы A B равны $\pi/2$ и $\pi/8$. (Терминология, характерная для задач ЕГЭ последних лет).

Ответ: $2\sqrt{2}$.

И) Ребра куба равны 1. Найти расстояние между серединами его скрещивающихся ребер. (Терминология, характерная для задач ЕГЭ последних лет). Ответ: $\sqrt{6}/2$.

К) На плоскости расположен отрезок AB длины 24 и две точки P и Q. Точка P равноудалена от A и B на расстояние 15, а точка Q также равноудалена от A и B на расстояние 20. Найти длину отрезка PQ, если известно, что она меньше длины отрезка AB. (Терминология, характерная для задач А) – Г)). Ответ: 7.

Л) Из точки, взятой на окружности, проведены две хорды, образующие угол в 45°. Длина отрезка, соединяющего середины этих хорд, равна 2. Найти длину радиуса окружности. (Терминология, характерная для задач А) – Г), где под радиусом понимается *отрезок*, один из концов которого — центр окружности, другой конец — точка окружности). Ответ: $2\sqrt{2}$.

Если внимательно вчитаться в условия и решения предлагаемых геометрических задач ДВИ по математике в МГУ последних лет, то и в них постоянно наблюдается та же "смешанная" терминология.

Методистам, отвечающим за школьное математическое образование, следовало бы обратить весьма пристальное внимание на проблему преодоления "путаницы" в терминологиях для восстановления математической науки в целом как стройной и строго логически построенной.

В дополнение отметим, следует *не смешивать*: "контурные" углы, "контурные" треугольники и многоугольники, с плоскими (терминология учебников А.В. Погорелова) углами и плоскими треугольниками и многоугольниками как соответствующими контурными фигурами, объединенными со своими внутренними областями (более четкой оказалась ситуация различия окружности и круга, сферы и шара). А также следует обратить внимание и на отсутствие объяснений, почему совпадение прямых, совпадение плоскостей, принадлежность прямой плоскости то относят к случаю параллельности (при этом отношение параллельности рефлексивно, что важно для выделения классов факторизации), то не относят. Подробнее см. [1].

Еще один момент: постоянное использование оборота "опущенный перпендикуляр", который на самом деле может быть и "поднятым вверх", проведенным "в бок" и.т.п. Судя по всему, этот оборот унаследован из учебника планиметрии А.П. Киселева. Однако в цикле школьных учебников геометрии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. везде в подобных ситуациях присутствует единственный и удобный для всяких возможностей расположения геометрических фигур оборот "перпендикуляр *проведен*".

4. Определенной традицией стало давать переопределенные определения частных видов параллелограммов: прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые, хотя достаточно потребовать наличие хотя бы одного прямого угла; ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны, хотя достаточно потребовать равенство хотя бы двух смежных сторон.

5. В ряде курсов высшей алгебры, авторы, приводя определение ранга матрицы как наибольшего порядка отличных от нуля ее миноров, забывают указать случай, когда ненулевых миноров нет, то есть случай нулевой матрицы, ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю.

6. Примерно с середины 1970-х годов в школьной тригонометрии отказались от записей в ответах к решениям уравнений значений целочисленных параметров вида $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$, заменив их на запись $n \in \mathrm{Z}$, которая все же по смыслу отличается от записи $a \in A$, предполагающей, что a — какой-то элемент множества A, а это не совсем согласуется с ситуацией, когда n оказывается *произвольным* целым числом, "пробегая" все множество целых чисел Z.

В варианте вступительного экзамена по математике на экономический факультет МГУ в 1991 году предлагалось решить уравнение

$$\sin(3\pi\times 2^x) = \cos(\pi\times 2^x) - \sin(\pi\times 2^x)\ .$$

Естественно было сделать замену $t = \pi\times 2^x$, где $t > 0$. Решая уравнение

$$\sin 3t = \cos t - \sin t,$$

получаем

$$2^x = \frac{1}{2} + n,\ 2^x = \frac{1}{12} + n,\ 2^x = \frac{5}{12} + n,$$

где n принимает любое целочисленное, но *неотрицательное* значение.

Ответ: $x = \log_2\left(\frac{1}{2} + n\right),\ x = \log_2\left(\frac{1}{12} + n\right),\ x = \log_2\left(\frac{5}{12} + n\right),\ n = 0,1,2,\ \ldots$.

Таким же образом записывался ответ в справочнике для поступающих в Московский университет 1992 года. Заметим, не $n \in N_0$, где N_0 — расширенный натуральный ряд чисел (подобное часто наблюдается в ряде книг по подготовке к вступительным экзаменам в вузы: наряду с записью $n \in \mathrm{Z}$ можно встретить записи вида $n = 0,1,2,\ \ldots$, если требуется отбор решений простейших тригонометрических уравнений, но это представляется весьма нелогичным). Однако 90 – 95% абитуриентов написали $n \in Z$, в общем, подразумевая (как уже до этого 15 лет учили в школах), что n — произвольное целое число. Это, разумеется, было, грубой ошибкой, но конкурсная ситуация требовала за эту ошибку не снижать оценку за данную задачу. Получалось, что при неверном ответе задача, фактически, засчитывалась как решенная верно. Замысел составителя этой задачи, где предполагалось умение производить отбор целочисленных значений параметра n, провалился. Но в 1991 году действовала "выхолощенная" программа по математике для поступающих в вузы (об этом ниже в работе будет говориться), а специальной программы по математике для поступающих в МГУ еще не было.

В варианте вступительного экзамена по математике на геологический факультет МГУ в 1996 году предлагалось решить уравнение

$$\sin 5|x| = \sin(-3) .$$

В соответствии с условием равенства синусов

$$|x| = \left((-1)^{n+1}\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{5}\right),$$

n может принимать только целые положительные (натуральные) значения.

Ответ: $x = \pm\left((-1)^{n+1}\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Вновь встречалась ошибочная запись $n \in Z$. Но, в отличие от ситуации, описанной в предыдущем примере, задача правильно решенной уже не считалась. Сказывалось существование более серьезной программы вступительных экзаменов по математике и, как следствие, более качественная подготовка абитуриентов, нежели в 1991 году. Подробнее см. [4] и [5].

7. Проблемной является "приученность" к ограничению на параметр a в показательной функции $y = a^x$: $0 < a \neq 1$.

Многие авторы и педагоги фиксируют ограничения на значение a: $0 < a$ и $a \neq 1$, то есть выбирают те же ограничения, что и для логарифмической функции $y = \log_a x$. Это можно объяснить тенденцией (увлечением) рассматривать вместе пары взаимно обратных функций. Тогда учащийся быстро воспринимает базовые решения уравнений и взаимную связь функций. Но работа с функциями (межпредметные связи) обязывает этим не ограничиваться, а поднять уровень концептуальности. Следует, по возможности, фиксировать максимально допустимые расширения функций. Иначе можно лишиться, например, периодических функций. Поэтому для показательной функции следует рассматривать $a = 1$, т.к. 1^x при любом действительном x определено и равно 1.

Другая крайность – небрежность в отношении не анализируемых последствий. В книге В.В. Зайцева, В.В. Рыжкова и М.И. Сканави «Элементарная математика» (последнее издание в середине 1970-х годов) мелким шрифтом говорилось о ситуации $a = 1$ и $a = 0$. Эти случаи считались слишком тривиальными, а потому, не представляющими интереса. Безмятежно выкинуто «взросление» учащегося на концептуальном пути.

Следует признать, что вопросы вида о множестве положительных решений уравнения $x^x=1$ в этих условиях не являются «честными». Часть учащихся, естественно, дает ответ «решений нет», что связано с их приученностью к ограничению $a \neq 1$ у показательной функции. Конечно, решение $x = 1$ очевидно. Также очевидно, что учащийся должен справиться с вычислением выражения 1^1. Тогда, возможно, его следует не наказать, а отметить как правильную тенденцию сведения неизвестной ему задачи к известной. В противном случае в выигрыше окажется более неподготовленный с ответом «не знаю». Но в конечном итоге дать учащемуся правильное разъяснение о решении этой задачи весьма важно.

Когда дело касается экзаменов, то последствия могут оказываться, мягко говоря, неэтичными. В варианте вступительного экзамена по математике на факультет ВМК МГУ в 1981 году предлагалось решить уравнение (вторая задача из шести)

$$\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}.$$

Отметим, что эта задача грамотно составлена. Условие $2x-1>0$ вытекает не потому, что $2x-1$ стоит в правой части в основании степени, а из-за выражения в левой части уравнения под знаком квадратного корня, да еще и в знаменателе дроби. Второе ограничение $1+7x-2x^2>0$ — это положительность выражения, от которого в показателе степени берется логарифм в правой части уравнения. Перепишем уравнение в виде: $(2x-1)^{-1/2}$ = $(2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}$. Это уравнение с учетом указанных ограничений на x сводится к следующей совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 2x-1=1; \\ \log_{1/4}(1+7x-2x^2) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; \\ 1+7x-2x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; \\ 2x^2-7x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=\dfrac{7+\sqrt{41}}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1$, $x = \frac{7+\sqrt{41}}{4}$.

В одной из экзаменационных работ, которую довелось проверять автору этой статьи, были правильно решены первая, третья, четвертая, пятая и половина шестой задачи. Во второй же задаче корень уравнения $x = 1$ был потерян, не было рассмотрено условие $2x-1 = 1$. Судя по всему, это произошло из-за пресловутого ограничения $a \neq 1$ на основание показательной функции. За работу была выставлена оценка 4. Не будь ошибки, была бы оценка 5 в соответствии с критериями выставления оценок того года. Тогда медалист мог быть представлен к зачислению на факультет без сдачи остальных вступительных экзаменов. Получив оценку 4, необходимо было сдавать все экзамены.

8. О степенной функции $y = x^{\alpha}$, ($\alpha > 0$) в связи с показательной функцией.

У такой степенной функции можно рассматривать неотрицательное значение x. В частности, 0 и 1 входят в ее область определения. Это обеспечивает определение $a^x = 1$ при $a = 1$ (причем для всех действительных x, поскольку для любого действительного α, не только положительного, $1^{\alpha}=1$), а также и $a^x = 0$ при $a = 0$ и $x > 0$, но при $x \le 0$ 0^x не определено. Правда, здесь стоит отметить, что поскольку уже для произвольного действительного α в школьном курсе считают функцию $y = x^{\alpha}$ определенной *только при всех положительных значениях* x, то для некоторых, в частности, положительных действительных значениях α вопрос о расширении такой области определения степенной функции *требует ее доопределения при* $x = 0$ *значением* 0. Последнее обстоятельство согласуется еще и с тем, что согласно определению натуральной степени *любого* числа a

$$a^n \overset{def}{=} \begin{cases} a, & \textit{если} \quad n=1, \\ \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}, & \textit{если} \quad n\ge 2, \end{cases}$$

откуда, в частности при $a = 0$ при любом натуральном n $0^n = 0$, далее, если $\alpha = \dfrac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа (стало быть, α – рациональное положительное число), то, распространяя на случай $a = 0$ определение степени с рациональным положительным показателем $a^{\alpha} = a^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^m}$ получим, что и при любом положительном рациональном α $0^{\alpha} = 0$. Кстати, можно на случай иррационального положительного α распространить определение значения a^{α} при $0 < a < 1$ и на $a = 0$ (это такое число b, которое удовлетворяет для любых рациональных положительных α' и α'' таких, что $\alpha' \le \alpha \le \alpha''$ неравенствам a

$^{\alpha''} \le b \le a^{\alpha'}$). Тогда получим, что и при любом иррациональном положительном α также $0^{\alpha} = 0$.

9. Об области определения функции $f(x)^{g(x)}$.

Это общий случай для показательной и степенной функции. Повторимся. Следует, по возможности, фиксировать максимально допустимые (школьной программой) расширения функций, обеспечивая концептуальное «взросление» учащегося. А в школьных курсах элементарной математики принято считать, что $f(x) > 0$. Часто это связано с определением a^b на основании формулы приведения $a^b = e^{b\ln a}$. Несогласованность замечают пытливые абитуриенты, приводя в пример выражение $(-1)^n$, фигурирующее в формуле решений простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$. Беспокоясь о концептуальности учащегося, следует считать областью определения сложной функции $f(x)^{g(x)}$ множество всех значений x, которые допускают вычисление выражения a^b. Тогда она определяется условиями: во-первых, $a > 0$; во-вторых, $a = 0$ и $b > 0$.

По этому поводу стоит обратить внимание на одну из задач, предлагавшихся на выпускном экзамене по математике на подготовительном отделении МГУ в 1996 г., где долгие годы (вплоть до 2010 г.) читался специальный расширенный подготовительный курс элементарной математики.

Найти все действительные решения $(x; y; z; t)$ следующей системы:

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 10\cdot 2^{x-y}, \\ (x^2+y^2)(x^z+y^z) = x^5+y^5+t^5, \\ \left|5-\dfrac{15}{z}\right| + \left|7+\dfrac{11}{z}\right| + |t| \le \dfrac{32}{3}. \end{cases}$$

Решение. Считая, что выражение $x^z + y^z$ в соответствии с "расширенной" областью определения выражения $f(x)^{g(x)}$ определено и при нулевых значениях x и y, при этом $z > 0$, а также при отрицательных значениях x и y и при этом, по крайней мере, целых значениях z, мы, обозначая через $u = 1/z$ с учетом того, что при любом t $|t| \ge 0$, получаем для левой части неравенства системы оценку снизу $|15u-5| + |11u+7| + |t| \ge |15u-5| + |11u+7| = g(u) \ge 32/3$, которая получается путем раскрытия модулей $|15u-5|$ и $|11u+7|$ и затем на основе монотонностей линейных функций на соответствующих промежутках — вычисления наименьшего значения выражения $g(u)$ по всем действительный значениям переменной u, которое оказывается равным как раз 32/3 и достигается оно при $u = 1/3$, стало быть $z = 3$. Таким образом, последнему неравенству системы, а потому и всей системе удовлетворяют только $z = 3$ и $t = 0$. Подставляя их в первое и второе уравнения системы, решая ее, получаем следующие четверки решений:

$$x = 0,\ y = 1,\ z = 3,\ t = 0;$$

$$x = \log_{5/2} 10,\ y = 0,\ z = 3,\ t = 0;$$

$$x = -\log_4 10 < 0,\ y = \log_4 10,\ z = 3,\ t = 0.$$

Возможны и другие расширения. Например, $a < 0$ и $b = m/(2n-1)$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Но при этом придется знакомить с обстоятельствами ограничений. В данном случае наличие нечетного знаменателя позволяет получить значение -1. При его отсутствии можем получить противоречие $-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1$. Тут эту проблему приходится решать двояким образом, или, сохраняя все основные свойства степеней с положительными основаниями, отказаться от рассмотрения неположительных значений стоящего в основании степени выражения $f(x)$, или, как это делается в курсах математического анализа, функция $y = x^{\alpha}$ при $\alpha = \dfrac{m}{2n-1}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, НОД $(|m|; 2n-1) = 1$, может быть доопределена при отрицательных действительных значениях x: четным образом при m четном и нечетным образом при m нечетном. Но в этом случае *приходится отказываться от выполнимости некоторых свойств степеней* для отрицательных оснований при $n \geq 2$. Для снятия указанного выше противоречия можно считать *по определению* $(-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$, а равенство типа $(-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6}$ — уже *не имеющим места* при отрицательных значениях основания степени. Это вполне согласуется еще и с тем, что значение корня шестой степени из квадрата –1 может быть не обязательно арифметическим, но тогда оно не обозначается радикалом. А если вести речь о выражении z^{α} для комплексных значений $z \neq 0$ и α, то из теории функций комплексного переменного (ТФКП) известно, сколько значений оно имеет на самом деле, и сколько из них являются действительными числами.

Кстати, еще отметим, что для случая $a = 0$ свойство степени $a^{-\alpha} = 1/a^{\alpha}$ не имеет места. Учитывая, что в настоящее время все это еще не вошло в школьную программу (хотя рассматривалось, например, в специальном курсе элементарной алгебры С.И. Новоселова для студентов педагогических вузов), для составителей экзаменационных задач вступительных испытаний следует выражение $f(x)$ задавать так, чтобы условие $f(x) > 0$ вытекало бы из дополнительных условий, можно вместо $f(x)^{g(x)}$ рассматривать или $\frac{1}{(\sqrt{f(x)})^{-2g(x)}}$, или $a^{g(x)\log_a f(x)}$ при постоянном a, которое удовлетворяет неравенствам $0 < a \neq 1$.

10. Довольно часто смешиваются ∞ и $+\infty$, хотя с точки зрения предельных переходов в математическом анализе функций одной переменной $-\infty, \infty$ и $+\infty$ все три разные бесконечности.

Например, в книгах часто используются как равные:

$$(a; +\infty) = (a; \infty); (-\infty; +\infty) = (-\infty; \infty);$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx; \; \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n; \; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z).$$

Объяснение этого в естественном отображении (наследственности) иерархии понятий в знаковых выражениях (в алгебре). На это следует специально обращать внимание. Знак ∞ относят к неограниченному множеству. Знаки $+\infty$, $-\infty$ относят к неограниченному множеству с порядком. Тогда, если в записи легко обнаруживается алгебраическая система с порядком, можем (по принципу умолчания) использовать любой вариант из приведенных равенств. Т.е. в каждом случае допустимо использовать более общий знак ∞ для частного случая. Обратим внимание, что при таком взаимоотношении понятий и знаков, можем писать и равенство $(\infty; a) = (-\infty; a)$. Допустимо даже равенство вида $(\infty; \infty) = (-\infty; +\infty)$. Оно не используется из-за схожести с $(a; a) = \varnothing$, но с иным смыслом ($(\infty; \infty)$ не равно $\varnothing$).

В математическом анализе другая картина. В анализе предел используется при характеристике неограниченных последовательностей. Знаки $+\infty$, $-\infty$ сообщают о неограниченности посредством предельной несобственной точки. Знак ∞ по-прежнему фиксирует неограниченность, но уже представляет три типа неограниченности: $+\infty$, $-\infty$ и другие (вида $(-1)^n n$).

Поэтому, если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$,

$$(\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty, \text{ если } \forall A > 0 \; \exists N(A): \forall n > N \Rightarrow |x_n| > A,$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \text{ если } \forall A > 0 \; \exists N(A): \forall n > N \Rightarrow x_n > A,$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty, \text{ если } \forall A > 0 \; \exists N(A): \forall n > N \Rightarrow x_n < -A),$$

т.е. общий знак ∞ заменяет соответственно знак $+\infty$, $-\infty$. Если же $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ и если мы собираемся быть точнее, то следует выяснить: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, или $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, или

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq -\infty \end{cases}.$$

Для последовательности $x_n = (-1)^n \cdot n$ имеет место $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, поскольку, фиксируя произвольное $A > 0$, взяв в качестве $N(A)$=[A]+1, ([A] — целая часть числа) получим, что $|x_n| > A$, однако ни определение $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, ни определение $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ для этой последовательности выполняться не будут.

Все же, по мнению автора данной работы (вследствие проиллюстрированного примера), *предпочтительнее использовать обозначения* для неограниченных числовых промежутков (a; $+\infty$), ($-\infty$; $+\infty$), в несобственных интегралах $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Даже, несмотря на то, что подавляющем большинстве изданий в суммах рядов (то есть в суммах всех членов некой последовательности u_1; u_2; u_3; …), где суммирование ведется по всем натуральным (всем целым положительным значениям индекса n), используется запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, следовало бы использовать $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Последний пример можно ведь обобщить на случай, например, рядов Лорана в ТФКП, где суммирование может вестись по всем целым значениям индекса n, тогда *следует писать* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(z)$, хотя часто можно встретить и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)$. Подробнее о материале пп. **10** и **11** см. [2].

11. Иногда авторы, используя в основном только знак включения одного множества в другое $\subset$, оговариваются и об использовании знака включения одного множества в другое $\subseteq$, не объясняя различие этих знаков.

Встречается разная семантика у знака $\subset$. Первая семантика — строгое включение (Ø $\not\subset$ Ø), тогда $\subseteq$ – нестрогое включение (Ø $\subseteq$ Ø). Это согласуется с использованием знаков порядка $<$ и $\leq$. Поэтому представляется неестественной вторая семантика — использование только знака $\subset$ (тогда A$\subset$A). При этом строгое включение записывается в виде ($A\subset B$ и A $\neq$ B), а нестрогое включение $A\subset B$, которое в любой из этих семантик имеет смысл: $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$.

Объяснить неестественное использование только знака отношения множеств $\subset$ можно через естественный механизм общности математического языка. Однако, выбирая из знаков $\subset$ и $\subseteq$ за базовый, (все же $\subseteq$, а не $\subset$, который тоже присутствует и имеет четко следующий смысл: $A\subset B$, если $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ и $\exists b' \in B$ такой, что $b' \notin A$, а также для всякого непустого множества A Ø $\subset$ A), останавливаемся на составном (не простом). В него лучше вложить «максимальное» расширение. В таком случае, более естественной становится, в частности, рефлексивность A$\subseteq$A, а не A$\subset$A.

12. В определении периодической функции f (x), говоря о существовании Т такого, что f (x+Т) = f (x), делают ограничение, что Т > 0, исключая, тем самым, наличие отрицательных периодов у периодической функции, хотя наряду с положительными периодами они обладают абсолютно одинаковыми свойствами. Единственное, что можно отметить, так это наличие основного периода (как наименьшего положительного периода), если он существует. Стало быть, все же следует считать $T \neq 0$. При наличии основного периода T_0 у периодической функции можно, применяя, в частности, метод индукции, доказать, что множество всех периодов этой функции состоит только из чисел вида nT_0, $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$.

13. Неоднозначным в математической литературе является введение комплексных чисел.

С одной стороны, как упорядоченных пар действительных чисел (a, b), между которыми вводятся отношения "равен" и "не равен". Над ними вводятся правила сложения и умножения, пара $(a, 0)$ отождествляется с действительным числом a, пару $(0, 1)$ называют мнимой единицей, обозначая буквой i.

С другой стороны, комплексные числа вводятся как выражения вида $a+bi$ с не введенными заранее операциями сложения между a и bi, умножением b и i, да и i пытаются ввести или как число, квадрат которого равен –1, или, что еще хуже, как квадратный корень из числа –1. Подробнее см. [2].

Разумеется, что первый способ математически более корректен и грамотен.

Список литературы

1. Будак А.Б. О некоторых традициях (стереотипах) изложения материала в курсах элементарной и высшей математики и необходимости их преодоления // Математика в образовании. 2011. Выпуск 7. С. 45-58.
2. Будак А.Б. О необходимых предварительных знаниях для изучения математического анализа и других начальных курсов высшей математики и преодолении стереотипов в изучении элементарной и высшей математики // Межвузовский сборник научно-исследовательских работ студентов и преподавателей «На перекрестках наук». Елец: Изд-во ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. С. 10-23.
3. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М: Проспект, 2012.
4. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Т. 1. М: Планета знаний, 2007.
5. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М: Наука, Физматлит, 1983.

ABOUT OVERCOMING CERTAIN STEREOTYPES IN THE DENOTATIONS BOTH NOMENCLATURES ELEMENTARY AND BEGINNINGS OF MAXIMUM MATHEMATICS

A.B. Budak
Candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer
e-mail: abbudak@cs.msu.su
Moscow

MSU by M.V. Lomonosov, faculty CS, department of general (common) mathematics

Abstract. Given article is contained important, on a sight of the writer, the offers on usage of the denotations both application of the terms in theory and problems elementary and beginnings of maximum mathematics. It is offered to supplement, more accurately and to make by more sequential usage of nomenclatures in elementary algebra, trigonometry and geometry, calculus, higher algebra both analytical geometry and other mathematical disciplines.

Keywords: stereotypes, length of a section, value of a corner, signs of including, scalar and vector products of vectors, ellipse, hyperbola, parabola, complex number.

References

1. Budak, A.B. (2011). About some traditions (stereotypes) of material presentation in elementary and higher mathematics courses and the need to overcome them [*O nekotoryh traditsiyax (stereotipah) izlojeniya materiala v kursah elementarnoy i vysshey matematiki i neobhodimosty ih preodoleniya*]. *Mathematics in Education*. V. 7. Pp. 45-58.
2. Budak, A.B. (2014). On the necessary preliminary knowledge for the study of mathematical analysis and other elementary courses in higher mathematics and overcoming stereotypes in the study of elementary and higher mathematics [*O neobhodimyh predvaritel'nyh znaniyah dlya izucheniya matematicheskogo analiza i drugih nachal'nyh kursov vysshey matemetiki i preodolenii stereotipov v izuchenii elementarnoy i vysshey matematiki*]. *Mejvuzovskiy sbornik nauchno-issledovatel'skih rabot studentov i prepodavateley «Na perekrestkah nauk»*. Yelets: Bunin Yelets State University. Pp. 10-23.
3. Il'in, V.A., Kim, G.D. (2012). Linear algebra and analytical geometry [*Lineynaja algebra i analiticheskaya geometriia*]. Moscow: Prospekt.
4. Kim, G.D., Kritskov, L.V. (2007). Algebra and analytic geometry. Theorems and problems [*Algebra i analiticheskaya geometriia. Teoremy i zadachi*]. Vol. 1. Moscow: Planet of knowledge.
5. Nesterenko, Ju.V., Olehnik, S.N., Potapov, M.K. (1983). Math exam tasks [*Zadachi vstupitel'nyh ekzamenov po matematike*]. Moscow: Science.

УДК 378.095

БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМАМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТНОСТИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ПРОЕКТОВ

Татьяна Юрьевна Дорохова
к.п.н., доцент
tandor81@mail.ru
г. Тамбов
Николай Петрович Пучков
д.п.н., профессор
puchkov_matematika@mail.ru
г. Тамбов

Тамбовский государственный технический университет

Аннотация. Работа посвящена оценке значимости результатов многофакторных процессов, параметры которых невозможно оценить методами точных наук. Показана целесообразность комплексного использования метода экспертных оценок и байесовского подхода для обоснования приоритетности выбранного педагогического проекта. В качестве рабочего предложен итерационный алгоритм, снижающий вероятности ошибок принятия решений. Предлагается учитывать мнения экспертов на вероятностном уровне. Показано, что расчёт средних апостериорных вероятностей даёт возможность принимать обоснованные решения относительно группы вариантов, когда мнения экспертов относительно всего множества вариантов считаются несогласованными. Рассмотрен пример использования предлагаемой методики для выбора наиболее оптимальной технологии обучения при целевой подготовке специалистов. Работа открывает дополнительные возможности применению математических методов в педагогических исследованиях.

Ключевые слова: педагогические проекты, экспертные оценки, байесовский подход, технология концентрированного обучения.

В системе образования осуществляются процессы, результаты которых зависят от большого количества разнородных факторов, причем параметры этих процессов зачастую невозможно непосредственно измерить, или применить для их исследования точные науки. При достаточно частом возникновении проблемы определения среди них приоритетных вариантов, выбор проводится специалистами на основе экспертной оценки. Неопределенность многофакторных исходов предопределяет использование в таких ситуациях стохастических (вероятностных) подходов. Одним из таких может быть байесовский подход – метод переоценки априорных данных (гипотез) с учетом апостериорных данных (результатов опытов, высказываний экспертов и т.п.).

В ряде случаев выбор приоритетного варианта требует оперативного решения. Например, по инициативе предприятий оборонно-промышленного комплекса (ОПК) вузу необходимо организовать для них целевую подготовку специалистов, которая в силу присущих ей целей, отличается от существующих. Возникает проблема выбора технологий обучения, результаты которого, к сожалению, можно как-то оценить только после выпуска специалистов (через несколько лет). За основу выбора, естественно, можно взять не абсолютно новые непроверенные технологии, а те, которые, в определенной степени, уже освоены специалистами. Подобные проблемы возникают также при конкурсном отборе проектов. Например, при рассмотрении заявок на получение грантов, студенческих научных работ и т.п.

Под технологией обучения мы понимаем описание процесса достижений планируемых результатов: это модель педагогической деятельности по проектированию, организации и проведению учебного процесса с безусловным обеспечением необходимых условий для обучаемого и обучающего.

Технология обучения концептуально содержит цель, содержание, средства и методы обучения, алгоритмы деятельности субъектов и объектов этого процесса. Критерии технологичности включают в себя такие понятия, как концептуальность, системность, управляемость, эффективность, воспроизводимость результатов и т.п.

Анализ ситуации с выбором технологии обучения позволяет говорить о многофакторной зависимости результатов обучения. Дать количественную оценку значимости каждого фактора, провести факторный анализ архисложно, поэтому имеет смысл использовать сравнительную экспертную комплексную оценку с целью выбора наиболее реального пути в обучении (приоритетной технологии обучения).

Возвращаясь к проблеме целевой подготовки, необходимо максимально точно и прозрачно обозначить критерии ее эффективности. На наш взгляд, это следующие:

- кадровое обеспечение предприятий (выполнение плана заказов);
- профессиональная компетентность специалистов;
- трудоустройство выпускников;
- приверженность работе на предприятии-заказчике и др.

В конкурсе по приоритетности могут выступить следующие формы обучения (пример носит демонстрационный характер):

- классическое лекционное обучение в общих потоках;
- концентрированное обучение [2];
- дистанционное обучение.

Каждая из рассматриваемых форм обладает сравнительными достоинствами: первый вид обучения наиболее экономичен, второй – в большей степени практико-ориентирован и комфортен, третий – удобен для студентов-заочников, для удаленных от вуза предприятий. В каждом их них, естественно, могут использоваться разнородные частнометодические и локальные (блочные) технологии, повышающие эффективность обучения, в том числе и различные подходы (компетентностный, личностно-ориентированный и т.п.).

Методы экспертной оценки зависят от поставленных целей, условий их осуществления, поэтому весьма разнообразны и, вообще говоря, носят случайный характер. Среди них можно выделить такие, которые проводятся индивидуально и одновременно всеми экспертами, а результаты затем проходят статистическую обработку и те, когда эксперты привлекаются последовательно и, в принципе, могут знать мнения друг друга. На наш взгляд, второй вариант более приемлемый в работе с педагогическими проектами по той причине, что результаты работы экспертной группы в ряде случаев показывают, что их мнения заметно расходятся (низкий коэффициент конкордации), и выбирать приоритет очень сложно. Кроме того, для снижения вероятности ошибок при оперативном решении ответственных проблем целесообразно использовать именно итерационный алгоритм с последовательным привлечением экспертов.

При этом мы учитываем и то обстоятельство, что каждый эксперт в своем заключении не бывает абсолютно уверенным в принятом решении, поэтому можно говорить только о вероятности принятия им определенного решения, которую он может самостоятельно оценить.

При таких предположениях оказывается возможным использование байесовского подхода в процессе последовательных итераций по оценке приоритетности рассматриваемых педагогических проектов. Рассмотрим сущность такого предложения на конкретном примере поиска приоритетного среди выделенных трех проектов (технологий обучения) и продемонстрируем процесс построения алгоритма принятия решений на основе экспертизы и байесовского подхода.

Первоначально исследователем («нулевым» экспертом) интуитивно или на основе обработки соответствующих статистических данных (например, результатов анкетирования всех участников образовательного процесса по вопросам комфортности предлагаемых форм обучения) проводится оценка приоритетности среди выбранных проектов (вариантов обучения), т.е. задаются вероятности гипотез $H_i, i = 1,2,3,$ утверждающих приоритетность i - ой гипотезы.

Идея алгоритма заключается в последовательном привлечении дополнительных экспертов и подсчете для каждого проекта средней апостериорной вероятности его приоритетности. Результаты работы каждого дополнительно привлекаемого эксперта рассматривается как исход проведенного опыта, а расчет апостериорной вероятности проводится по формуле Байеса:

$$P(H_i / A_j) = \frac{P(A_j / H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_j / H_i) \cdot P(H_i)}, \ i = \overline{1,n}, \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

где H_i – гипотеза о том, что i - ый вариант является приоритетным; A_j – событие (результат экспертизы) о приоритетности j - го варианта; n – число рассматриваемых вариантов; $P(H_i)$ – априорная вероятность гипотезы H_i; $P(H_i / A_j)$ апостериорная вероятности гипотезы H_i (после того, как A_j произошло: j - ый вариант поставлен на первое место); $P(A_j / H_i)$ – вероятность события A_j, если имеет место гипотеза H_i, $i = \overline{1,n}$. Формула (1) применима и в том случае, когда событие A_j не произошло, (произошло $\overline{A}_j$).

Каждый эксперт определяет ранг варианта, т.е. расставляет «по местам», поэтому получается n переоценок события H_i; в дальнейшем рассматривается их усредненное значение апостериорных вероятностей

$$\overline{P}_k(H_i / A) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(H_i^k / \tilde{A}_j) \;\; i, j = \overline{1, n}$$

где k – номер экспертизы (последовательный номер эксперта), событие $\tilde{A}_j$- событие, связанное с проверкой гипотезы H_j^k, т.е. того что k – ый эксперт поставит j - ый вариант на первое место, поэтому для части слагаемых имеет место A_j, для остальных $\overline{A}_j$ и $A=\left\{ \tilde{A}_j, j = \overline{1, n} \right\}$. Полученные усредненные значения k – ой итерации используются для нахождения апостериорных оценок на k +1– ой итерации.

Выполненный расчет средних апостериорных вероятностей дает возможность принимать обоснованные решения относительно предпочтительного варианта, когда мнения экспертов относительно множества вариантов являются несогласованными. Расчет апостериорной вероятностей на каждой итерации позволяет исключить из рассмотрения заведомо неприоритетные варианты.

Таблица 1.

Результаты экспертной оценки

Варианты технологий	Традиционное обучение	Концентрированное обучение	Дистанционное обучение
Априорные ранги (нулевой эксперт)	2	1	3
Априорные вероятности	0,25	0,5	0,25
Ранги первого эксперта	1	2	3
Усредненные апостериорные вероятности	0,309	0,455	0,236
Ранги второго эксперта	2	1	3
Усредненные апостериорные вероятности	0,267	0,527	0,206
Ранги третьего эксперта	2	3	1
Усредненные апостериорные вероятности	0,276	0,45	0,279

Продолжим рассматривать пример с выбором формы обучения для студентов, обучающихся на договорной основе. Для того, чтобы воспользоваться формулой Байеса (1) необходимо знать $P(A_j / H_i)$ — вероятность события A_j, при наступлении события H_i (вероятности признания экспертом приоритетности события H_i).

При оценке этих вероятностей, по-видимому, необходимо руководствоваться теми соображениями, что эксперт в определенной мере сомневается в принимаемом решении, и первое место определенному проекту он отдает с большей уверенностью, чем другим, например, $P(A_2 / H_2) = 0{,}8, \;\; P(A_{(2} / H_i, i \neq 2) = 0{,}6$, если второй вариант поставлен на первое место.

Работа продолжается до тех пор, пока средняя апостериорная вероятность одного из проектов станет явно наибольшей.

Опуская промежуточные расчеты, приведем результаты некоторых итераций переоценки приоритетности технологий обучения в обозначенной нами выше проблеме.

Итак, пусть априорные оценки приоритетности таковы:

$$P\,(H_1) = P\,(H_3) = 0{,}25; \quad P\,(H_2) = 0{,}5;$$

Каждый эксперт определяет первое место среди проектов с вероятностью $P(A_j\,/\,H_j) = 0{,}8,$ и остальные места с вероятностью $P(A_j\,/\,H_i\,) = 0{,}6,\ j \neq i$

Соответственно $P(\bar{A}_j\,/\,H_j) = 0{,}2,$ и $P(\bar{A}_j\,/\,H_i\,) = 0{,}4,\ j \neq i$ (эти данные характеризуют степень уверенности эксперта в своих заключения). Получаем таблицу 1.

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что второй проект (концентрированное обучение), несмотря на противоречивые мнения экспертов, постоянно и в итоге оценивается максимальной вероятностью. Следовательно, нашла подтверждение гипотеза №2.

Может возникнуть естественный вопрос о необходимом количестве итераций и, соответственно, числе задействованных экспертов. Некоторые авторы [1], использовавшие байесовский подход в своих исследованиях, предполагают дополнительно привлекать математический аппарат, основанный на комбинации моделей Бернулли для повторных испытаний, но, все же единственно надежным следует считать оценку качества подготовки специалистов на момент ее окончания.

В качестве заключения можно утверждать, что при оперативном решении ответственных проблем выбора приоритетов среди проектов, зависящих от многочисленных факторов и не поддающихся количественной оценке, целесообразно использовать методы экспертных оценок, опирающиеся на математические методы. Таким методом может явиться итерационный метод экспертных оценок, построенный на основе формул Байеса и позволяющий снизить вероятность ошибок выбора, обусловленных низким уровнем коэффициента конкордации среди высказываний экспертов. Алгоритм метода достаточно прозрачен и доступен для пользователей, не имеющих специальной математической подготовки.

Список литературы

1. Муромцев Д.Ю., Орлова Л.П., Козлов А.И. Принятие решений с использованием байесовского подхода и экспертных оценок // Вестник ТГТУ. 2003. № 1 (9). С. 15 - 24.
2. Пучков Н.П., Дорохова Т.Ю. Проектирование системы концентрированной практико-ориентированной подготовки специалистов для высокотехнологичных производств //Alma mater. 2018. № 2. С. 52-57.

BAYES APPROACH TO THE PROBLEMS OF DETERMINING THE PRIORITY OF PEDAGOGICAL PROJECTS

T.Yu. Dorokhova
Dr. Sci. (Pedagogy), ass. professor
tandor81@mail.ru
N.P. Puchkov
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
puchkov_matematika@mail.ru
Tambov

Tambov State Technical University

Abstract. The work is devoted to assessing the significance of the results of multifactor processes, the parameters of which cannot be estimated by the methods of exact sciences. The expediency of the complex use of the expert assessment method and the Bayesian approach to justify the priority of the selected pedagogical project is shown. An iterative algorithm is proposed as a worker, reducing the probability of decision-making errors. It is proposed to consider the opinions of experts at a probabilistic level. It is shown that the calculation of the average a posteriori probabilities makes it possible to make informed decisions regarding a group of options, when expert opinions on the entire set of options are considered inconsistent. An example of the use of the proposed methodology to select the most optimal training technology for targeted training of specialists is considered. The work opens up additional possibilities for the application of mathematical methods in pedagogical research.

Keywords: pedagogical projects, expert assessments, Bayesian approach, concentrated learning technology.

References

1. Muromcev D.Yu. (2003). Making decisions using the Bayesian approach and expert assessments [*Priniatie reshchenii` s ispol'zovaniem ba i`esovskogo podhoda i 'ikspertny`h ozenok*]. *Bulletin of Tver State Technical University*. V. 1 (9). Pp. 15 - 24.
2. Puchkov N.P. (2018). Designing a system of concentrated practice-oriented training of specialists for high-tech industries [*Proektirovanie sistemy kontsentrirovannoj praktiko-orientirovannoj podgotovki spetsialistov dlya vysokotekhnologichnykh proizvodstv*]. *Alma mater* (High school bulletin). 2018. V. 2. Pp. 52-57.

УДК 378.016

О ПРЕПОДАВАНИИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В МАГИСТРАТУРЕ ОРЕНБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Инна Каримовна Зубова
к.ф-м.н., доцент
zubova-inna@yandex.ru
Лариса Михайловна Анциферова
к.п.н.
antsiferova_68@mail.ru
Ольга Викторовна Острая
ostraya_05@mail.ru
г. Оренбург

Оренбургский государственный университет

Аннотация. Авторы предлагают концепцию курса истории и методологии прикладной математики, читаемого ими в Оренбургском государственном университете для магистрантов направления подготовки «Прикладная математика и информатика». Этот курс рассматривается как часть введения в специальность для обучающихся в магистратуре. При его чтении лектор знакомит слушателя, например, с историей формирования некоторых разделов механики, одновременно напоминая основы важнейших теорий, на которых базируются эти разделы. Здесь применяется так называемый историко-генетический метод преподавания, когда в процессе изучения основ дисциплины обучающийся прослеживает историю ее зарождения, формирования и развития.

Ключевые слова: историко-генетический метод преподавания математики, история математики, история механики.

Нередко во время знакомства с какой-либо новой для себя и трудной теорией студент спрашивает: «Где, когда и для чего эта теория применяется?» И бывает так, что обстоятельный и квалифицированный ответ преподавателя не удовлетворяет учащегося, поскольку он ещё совершенно незнаком с той современной областью знаний, в которой рассматриваемая теория находит применение. Лучшего эффекта часто удается достигнуть, поставив другие вопросы: «Как возникли предпосылки формирования этой теории? При решении каких задач они появились? Когда и в связи с чем эти задачи были поставлены?»

Отвечая на подобные вопросы в процессе преподавания любой математической дисциплины, мы обращаемся к так называемому историко-генетическому методу изложения материала. В основе этого метода лежит следующий подход: формируя сумму знаний в какой-либо области науки, обучающийся должен в некотором смысле пройти исторический путь формирования знаний всего человечества в этой области. Это и должно помочь ему в усвоении основ изучаемой дисциплины. Конечно, этот исторический путь приходится проходить в короткий срок, поэтому преподаватель должен в первую очередь остановиться на основных, опорных моментах истории формирования той или иной области науки.

Историко-генетическому методу преподавания математики обычно противопоставляется логический метод, который не предполагает отходов в сторону от логически строгого построения теории. Опыт работы в высшем учебном заведении показывает, что в преподавании высшей математики при чтении как классических, так и специальных курсов вполне возможно сочетание этих методов.

В начале обучения в магистратуре студенту нередко приходится в короткий срок познакомиться с основами нового для него раздела математики. Нам представляется, что это изучение следует начинать с обсуждения вопроса о происхождении и развитии этого раздела. Например, с магистрантами, обучающимися по направлению подготовки «Прикладная математика», приходится говорить о различных разделах теоретической механики, о которых не все поступившие в магистратуру имеют достаточно широкое представление. Согласно учебному плану, в первом семестре магистратуры по этой специальности на факультете математики и информационных технологий Оренбургского университета читается курс «История и методология прикладной математики и информатики». В рамках этого курса мы, в частности, пытаемся познакомить слушателя с основами этих разделов механики и одновременно с историей их формирования.

В различных трудах по истории науки предлагаются различные варианты выделения основных периодов развития математики. Классической считается периодизация, предложенная в 1938 г. академиком А.Н. Колмогоровым (1903-1938) и опубликованная впервые в статье «Математика» Большой советской энциклопедии. Именно на этой периодизации основывается большинство курсов истории математики, например, курс К.А.Рыбникова [6]. Вводя эту периодизацию, А.Н. Колмогоров исходил, прежде всего, из особенностей математики каждого периода. Именно поэтому эта периодизация настолько удачна, и именно поэтому, изучая историю отдельных областей математики или близких к математике наук, мы постоянно обращаемся к ней. Касается это и истории механики.

Первый период развития математики, названный А.Н.Колмогоровым периодом её зарождения, начинается с появления самых ранних математических понятий человечества. Их возникновение следует отнести к III-II тысячелетиям до нашей эры. Этот период продолжается до VI - V вв. до н.э., характеризуется накоплением фактического материала и заканчивается формированием зачатков математических теорий.

Начало второго периода развития математики А.Н.Колмогоров относит к VI-V векам до н.э. Этот период, названный периодом элементарной математики, или математики постоянных величин, продолжается до начала XVII века. На лекциях об этом столь продолжительном периоде следует рассказать подробнее, выделяя его основные моменты.

Ясное понимание самостоятельного положения математики как особой науки впервые возникает в Древней Греции. Наибольший расцвет греческой науки и культуры начался с середины VII века до н.э., и продолжался около трехсот лет. Культурный переворот, произошедший в этот сравнительно недолгий с точки зрения историка отрезок времени, называют «греческим чудом», поскольку он оставил ни с чем не сравнимый по глубине след в истории всей мировой культуры и науки, в том числе и в истории математики.

Именно в это время греки, в частности, Фалес Милетский (624-547 гг. до н.э.), ввели в математику важнейший ее элемент – доказательство любого утверждения, т.е. вывод этого утверждения из других, более очевидных или заведомо верных утверждений. Введение в математику доказательства является историческим событием, начинающим второй период развития математической науки. В IV в. до н.э. итогом развития античной математики становятся «Начала» Евклида, труд, в котором систематизируются основы сформировавшейся к этому времени математики.

В математике периода эллинизма (III-I вв. до н.э.) появляется целый ряд новых черт, существенно отличающих её от математики античности. Главной из этих новых черт является сближение теоретической науки с практической деятельностью. Это важнейший период истории прикладной математики.

Уже со II века до н.э. начинается спад в развитии культуры и науки Древней Греции, связанный с началом разрушительных войн, которые, в конце концов, привели к созданию Римской империи. В конце V в. Западная Римская империя пала, разрушенная восстаниями рабов и завоеваниями варваров. На этом закончилась история древнего мира и началась история средних веков. Восточная Римская империя тем временем продолжала существовать, достигла наивысшего расцвета в VI веке при императоре Юстиниане, и пала только в середине XV в. после завоевания турками Константинополя, являвшегося её центром.

Раннее средневековье – VI-X вв. – для европейской науки, особенно для математики, было периодом забвения и гонений. В это время ведущая роль в развитии математических наук переходит к странам ислама. Управление таким огромным государством, как Арабский халифат, требовало интенсивного развития торговли и военного дела, протяженность территории ставила людей перед необходимостью совершать длительные путешествия, поэтому здесь нужны были знания в области астрономии и всех связанных с нею наук. Это создавало серьезные стимулы для развития математики. Восточные ученые целенаправленно изучали и переводили на арабский язык математические рукописи греков и индийцев, а также являлись авторами многих самостоятельных открытий, прежде всего, в вычислительной математике.

В Европе тем временем постепенно формируются те стимулы для развития естественных наук, которых там не было в средние века, и начинается период пробуждения научной мысли. XII век становится для европейских ученых «веком великих переводов». В это время труды греческих и арабских математиков активно переводятся на латынь, Европа знакомится с этими трудами.

В 1453 г. турки завоевали Константинополь. Закончилось существование Восточной Римской империи. Началось массовое переселение её обитателей на Запад, и при этом – перемещение туда хранившихся до этого в Константинополе трудов классиков древнегреческой науки. Если до сих пор в западной Европе эти труды постепенно становились известны в переводах с арабского языка, то теперь европейцы начали знакомиться с ними в подлиннике. В.П.Шереметевский в своих замечательных «Очерках по истории математики [10] называет XII-XV века «периодом усвоения Европою античной и восточной науки».

Вторая половина XV и XVI век (эпоха Возрождения) – это время первых самостоятельных научных открытий в Европе. Буквально во всех областях человеческой деятельности Ренессанс оставил великие результаты. По словам Ф. Энгельса, «Это был величайший прогрессивный переворот из всех пережитых до того времени человечеством».

В первой половине XVII века начинается третий период развития математики, названный А.Н. Колмогоровым периодом создания математики переменных величин. Этот период начинается с 1637 года, когда был опубликован труд Рене Декарта (1596-1650) «Геометрия». В этой работе в математику впервые была введена переменная величина. Введя систему координат и сопоставляя каждой точке кривой точку на оси абсцисс, он получает уравнение кривой. С этого начинается изучение свойства кривых по их уравнениям и формирование аналитической геометрии. После этого, по словам Ф.Энгельса, «стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает, и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем».

На это высказывание мы обращаем особое внимание, чтобы подчеркнуть, что Исаак Ньютон (1643-1727) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) действительно в общем и целом завершили новое исчисление на основе созданных к этому времени предпосылок его возникновения. Однако для дальнейшего формирования математического анализа потребовался весь период создания математики переменных величин – XVII, XVIII и первая половина XIX века. Именно в этот период сформировались все математические дисциплины, которые в наши дни изучаются в старших классах и в высшей школе. XVIII век, который часто называют «веком просвещения», в истории математики стал временем активного развития математического анализа и многих базирующихся на нем отраслей математической науки: вариационного исчисления, дифференциальных уравнений, математической физики, теоретической механики и т.д. С этим периодом связаны имена Леонарда Эйлера (1707-1783), Даниила Бернулли (1700-1782), Жана Лерона Д'Аламбера (1717-1783), Жозефа Луи Лагранжа (1736-1813). В это время математика все активнее применяется в механике, оптике, астрономии, кораблестроении. Это время быстрого развития капитализма, а, следовательно, и техники. Это период крупных успехов в экспериментальной науке, настоятельно требовавших от математиков теоретического обоснования.

На рубеже XVIII и XIX веков возникают новые тенденции в развитии математики. Готовится почва для возникновения совершенно новых ее областей. Мы выделяем особенно важные для формирования математики события этого времени.

1. Строгое обоснование анализа бесконечно малых (О.Л.Коши (1789-1857), К. Вейерштрасс (1815-1897)).
2. Создание основ теории функций комплексной переменной.
3. Создание неевклидовых геометрий (Н.И.Лобачевский (1792-1856), К.Ф. Гаусс (1777-1855), Я. Бойяи (1802-1860), Б. Риман (1826-1866)).
4. Создание теории групп (Э.Галуа (1811-1832)).
5. Появление первых высших технических учебных заведений с углубленным изучением математики.

Таким образом, первая половина XIX века – время формирования той математики, которая теперь изучается в университете. С середины этого столетия начинается четвертый период развития математики, названный А.Н.Колмогоровым периодом современной математики. В это время в математической науке происходят новые существенные изменения. Значительно расширяется множество самих объектов, с которыми работает математика, появляются новые математические теории, расширяется область их приложения. В связи с этим математика приобретает целый ряд совершенно новых черт.

Несомненно, уже пришло время уточнять периодизацию в этой последней ее части. Совершенно ясно, что математика XXI века существенно отличается от математики века двадцатого, когда новые информационные технологии еще не имели такого высокого уровня развития, какого достигли буквально за последние десятилетия.

Для знакомства с важнейшими историческими фактами, связанными с формированием механики, мы предлагаем обучающимся ознакомиться с трудами видных историков этой науки, например, [1,2, 8, 9, 11]. Затем эти работы обсуждаются на семинарских занятиях. Студентам предлагается, опираясь на предложенную А.Н.Колмогоровым периодизацию развития математики, выделить основные периоды истории механики или важнейших ее разделов.

В общей истории развития механики можно выделить три основных периода. Начальный период (с древнейших времен до XVII в.) приблизительно соответствует первому и второму периодам развития математики. Второй период, котрый называют переходным, охватывает XVII и первую половину XVIII в. С середины XVIII в., примерно на столетие раньше начала периода современной математики, начинается период аналитической механики.

Под термином «механика начального периода» следует понимать ещё не науку, а только изготовление первых, самых примитивных орудий труда и постепенное их совершенствование. Можно считать, что начало первого периода развития механики приблизительно совпадает с началом периода зарождения математики: потребность вести счёт, необходимость во все более сложных расчетах растет с совершенствованием приспособлений для охоты, рыбной ловли, выделки шкур, позднее для земледелия, производства посуды и т.д. Все эти орудия и приспособления достигли довольно высокого уровня развития уже при рабовладельческом общественном строе.

Основываясь на результатах исторических исследований, в пределах начального периода развития механики можно далее выделить такие важнейшие этапы, как античная механика, средневековая механика Востока, механика средневековой Европы, механика эпохи Возрождения.

Большой скачок в развитии механики следует связать с эпохой эллинизма, когда были заложены основы пневматики, гидравлики, теории упругости воздуха. Однако на протяжении почти двух тысяч последующих лет развитие механики шло довольно медленно. Хозяйство было рассчитано только на потребление, производство с целью обмена еще только возникало. Несовершенными были сухопутные дороги и морской транспорт, суда имели плохую устойчивость и небольшую грузоподъёмность.

Появление и совершенствование новых машин и механизмов стимулировалось постепенным развитием торговли. К концу эпохи средневековья начинается быстрое развитие промышленности, делаются великие географические открытия, развивается астрономия. Всё это ставило перед учеными целый ряд новых проблем, связанных, например, с увеличением грузоподъемности судов, улучшением их плавательных свойств, разработкой удобных и надежных способов ориентировки в море по Солнцу и звездам, предсказанием приливов и отливов, усовершенствованием внутренней водной системы и сообщения с морем, строительством каналов и шлюзов. Для добычи металла возникает необходимость более эффективной эксплуатации шахт и рудников. Перед механикой встают такие задачи, как подъем руды с большой глубины и необходимые для этого расчеты воротов, блоков, устройство вентиляционных приспособлений в шахтах, откачка воды из шахт и др. Быстро развивается военная техника. Артиллерия потребовала от механики разрешения таких вопросов, как повышение прочности орудия при наименьшей его массе, изучение зависимости между скоростью полёта снаряда и сопротивлением воздуха, определение траектории движения снаряда в пустоте и т.п.

Начиная с XVI века наступает эпоха грандиозных открытий в астрономии, машиноведении, гидравлике. В это время ставятся и начинают решаться важнейшие задачи теории упругости. Первый этап становления теории упругости как науки можно связать с работами Г.Галилея, Р. Гука, Э.Мариотта. В дальнейшее её развитие неоценимый вклад внесли Жозеф Луи Лагранж (1736-1813), Томас Юнг (1773-1829), Софи Жермен (1776-1831) и др. Только к концу XVIII в. эта часть механики сплошной среды становится разделом аналитической механики.

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) в труде «Аналитическая механика». изданном в 1788 г. подвёл итог всем достижениям механики XVIII века. Все учение о равновесии и движении в этом труде сведено к общим уравнениям. К концу XVIII - началу XIX вв. были заложены основы сопротивления материалов и создана почва для возникновения теории упругости. Быстрое развитие техники ставило перед математикой огромное количество практических задач, что и привело к быстрому развитию самой теории. Одной из многих важных проблем была проблема исследования свойств упругих материалов. Решение этой проблемы давало возможность более глубоко и полно изучить внутренние силы и деформации, возникающие в упругом теле под действием внешних сил.

Датой возникновения математической теории упругости следует считать 1821г., когда вышла в свет работа Л.М.А. Навье (1785-1836), в которой были сформулированы её основные уравнения. Большие математические трудности решения задач теории упругости привлекли к ней внимание многих выдающихся ученых-математиков XIX в.: Г. Ламе, Б. Клапейрона, С.Д. Пуассона и др.

Дальнейшее развитие теория упругости получила в трудах французского математика О.Л. Коши (1789-1857), который ввел понятия деформации и напряжения, упростив тем самым вывод общих уравнений.

В 1828 г. основной аппарат математической теории упругости нашел свое завершение в трудах французских ученых и инженеров Г. Ламе (1795-1870) и Б. Клапейрона (1799-1864), преподававших в то время в Институте инженеров путей сообщения в Петербурге. В их совместной работе дано приложение теории упругости к решению практических задач. Решение многих таких задач стало возможным после того, как французский механик Б. Сен-Венан (1797-1886) выдвинул принцип, получивший его имя, и предложил эффективный метод решения задач теории упругости. Заслуга его, по словам английского ученого А. Лява (1863-1940), заключается еще и в том, что он увязал проблемы кручения и изгиба балок с общей теорией. Если французские математики занимались в основном общими проблемами теории, то русские ученые внесли большой вклад в развитие науки о прочности решением многих актуальных практических задач.

Таковы основные положения вступительной части нашего курса истории и методологии прикладной математики и механики для магистратуры. Выделив основные периоды истории развития механики, мы обратили особое внимание на историю формирования теории упругости. В зависимости от направления исследовательской деятельности обучающихся, мы во время семинарских занятий проводим аналогичную работу, связанную с другими разделами механики и прикладной математики.

Список литературы

1. Боголюбов А.Н. Механика в истории человечества. М.: Наука, 1978.
2. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. М.: Высшая школа, 1974.
3. Дроздов Н.Д. История и методология прикладной математики: учебное пособие для студентов университетов, обучающихся на факультетах прикладной математики. Тверь: Твер. гос. ун – т, 2006.
4. История механики с конца 18 до середины 20 века / под ред. А.Т. Григорьяна. М.: Наука, 1972.
5. Русанов В.В. История и методология прикладной математики: учеб. пособие / Науч. ред. А.В. Баев. Под общ. ред. В.В Русанова. М.: Издательский отдел факультета ВМ и К МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004.
6. Рыбников К.А. История математики: учебное пособие для университетов. М.: изд. МГУ, 1994.
7. Рыбников К.А. Возникновение и развитие математической науки. М.: Просвещение, 1987.
8. Трусделл К. Очерки по истории механики. М.: Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.
9. Тюлина И.А., Чиненова В.Н. История механики: учеб. для вузов. М.: изд-во МГУ, 2002.

10. Шереметевский В.П. Очерки по истории математики. М: Едиториал УРСС, 2004.
11. Яковлев В.И. Предыстория аналитической механики: монография. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

ON TEACHING THE HISTORY OF MATHEMATICS IN THE MASTER STUDENT OF ORENBURG UNIVERSITY

I.K. Zubova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
zubova-inna@yandex.ru
L.M. Antsiferova
Candidate of Pedagogical Sciences
antsiferova_68@mail.ru
O.V. Ostraya
ostraya_05@mail.ru
Orenburg

Orenburg State University

Abstract. The article describes the historical-genetic method of teaching mathematical disciplines and its application in work with masters studying in the field of "applied mathematics". The course content "History and methodology of applied mathematics and computer science", which the authors develop and read for the magistracy of this area of training, is outlined. This course contains elements of the history of mechanics, since the subjects of the scientific work of many undergraduates are related to questions of mechanics. The course uses the periodization of the history of mathematics, proposed by Academician A. Kolmogorov. Within each period, the main points of the history of the development of mechanics are considered. The course is considered as part of the introduction to the specialty for students in the magistracy.

Keywords: The Historical-genetic method in the teaching mathematical disciplines, the history of mathematics, the history of mechanics, the origins of the theory of elasticity.

References

1. Bogolyubov, A.N. (1078). Mechanics in the History of Mankind [*Mekhanika v istorii chelovechestva*]. Moscow: Nauka.
2. Veselovskij, I.N. (1974). Essays on the history of theoretical mechanics [*Ocherki po istorii teoreticheskoj mekhaniki*]. Moscow.
3. Drozdov, N.D. (2006). History and Methodology of Applied Mathematics [*Istoriya i metodologiya prikladnoj matematiki: Uchebnoe posobie dlya studentov universitetov, obuchayushchihsya na fakul'tetah prikladnoj matematiki*]. Tver.
4. History of mechanics from the late 18th to mid-20th-century (1972) [*Istoriya mekhaniki s konca 18 do serediny 20 veka*]. Editors A.T. Grigoryan . Moscow.
5. Rusanov, V.V. (2004). History and Methodology of Applied Mathematics [*Istoriya i metodologiya prikladnoj matematiki: ucheb. posobie*] . Moscow.
6. Rybnikov, K.A. (1994). History of Mathematics: a Textbook for High Schools [*Istoriya matematiki: uchebnoe posobie dlya universitetov*] . Moscow.
7. Rybnikov, K.A. (1987). The Origin and Development of Mathematics [*Vozniknovenie i razvitie matematicheskoj nauki*]. Moscow.

8. Trusdell, K. (2002). Essays on the History of Mechanics [*Ocherki po istorii mekhaniki*]. Moscow.
9. Tyulina, I.A., CHinenova, V. N. (2002). History of Mechanics [*Istoriya mekhaniki*]. Moscow.
10. Sheremetevskiy, V.P. (2004). Essays on the History of Mathematics [*Ocherki po istorii matematiki*]. Moscow.
11. Yakovlev, V.I. (2001). The Prehistory of Analytical Mechanics [*Predystoriya analiticheskoj mekhaniki: monografiya*]. Izhevsk: Research Center "Regular and chaotic dynamics".

УДК 37.02

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОТЕЧЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Александр Александрович Русаков
д.п.н., профессор
vmkafedra@yandex.ru
г. Москва

Московский технологический университет

Аннотация. Обсуждается эволюция единой глобальной конвергентной инфокоммуникационной среды. Рассматриваются опыт и перспективы взаимодействия НМС по математике с Комитетом по науке и образованию ГД Российской Федерации.

Ключевые слова: обучающие машинные системы, образовательные услуги, научно-методический совет по математике.

I. Несколько лет в образовательной среде протекают как бы два параллельных и мало связанных процесса: модернизаторы активно меняют среду - цифровизируют ее, а традиционные педагогические институты продолжают развивать информатизацию. Это видно по проводимым конференциям и содержанию статей. И если первых можно понять – они считают, что система образования в стране безнадежно отстала и ее опыт не может быть использован, то некоторая отстраненность вторых вызывает вопросы. Ведь благодаря многолетнему опыту их работы, им хорошо понятны социальные последствия любых, особенно стремительных, преобразований такой инерционной среды, как образование.

Приведем цитаты оценок нынешнего состояния образования в РФ специального представителя президента РФ по вопросам цифрового и технологического развития Д. Пескова и директора по направлению "Кадры и образование" АНО "Цифровая экономика" А. Сельского:

«В целом, очевидно, что традиционное высшее образование в массе своей (пока отложим в сторону несколько выколотых точек — исключений) отстает от реальной жизни и не содержит внутри себя драйверов, заинтересованных в изменениях сложившейся модели»;

«Требования к системе образования очень простые. Нам нужно готовить очень много специалистов с ИТ-компетенциями. И готовить их быстро и качественно. Система образования сейчас не может выполнить ни одну из этих трех функций: она готовит мало, долго и дорого. Нам нужно поменять все три подхода, при этом есть передовые практики, но их нужно легализовать и поддержать. Например, компания Mail.ru Group делает прекрасные программы по подготовке специалистов по информационной безопасности, Сбербанк создал "Школу 21", где программисты учатся вообще без преподавателей. В эту сторону необходимо направлять внимание, нормы, финансы»;

«Надо позволить готовить специалистов быстрее. "Школа 21" отказалась от дипломов. Зачем человеку с востребованной ИТ-специальностью сегодня диплом государственного образца, если он умеет анализировать большие данные?».

Рассмотрим эволюцию единой глобальной конвергентной инфокоммуникационной среды (ИКС). Сегодня в числе взаимодействующих в ИКС объектов можно выделить человеко-машинные системы (MMS), машинные системы (MS), системы интернета вещей (IoTS), обучающие машинные системы (MLS) и системы искусственного интеллекта (AIS). Но в скором времени все эти объекты конвергируют в IoTS. Обозначим эту конвергенцию как - IoTSMMS, IoTSMS, IoTMLS и IoTAIS.

Эта конвергенция обозначает, что с этого этапа все взаимодействующие в ИКС объекты будут не только потребителями данных об окружающих природной и социальной средах, которые производили IoTS, но и сами станут источниками данных о себе. Такая трансформация позволит перейти к предоставлению индивидуализированных услуг [3].

Фактически, этот переход означает новый качественный скачок.

На рисунке 1 показано, что предполагается разделить сферы использования технологической компоненты (обучения, в том числе и MLS) на три сферы:

1) сфера предоставления стандартизированных услуг, связанных с работой и досугом, 2) область образования, 3) область исследований. В этих сферах задачи использования MLS являются важной технологической составляющей предоставляемых услуг: на основе показаний IoTS, которые осуществляют мониторинг окружающей пользователя среды и на основе имеющейся модели, MLS помогают каждому пользователю быстрее и рациональнее решить задачу функционирования в этой сфере, то есть выполнить стандартную задачу.

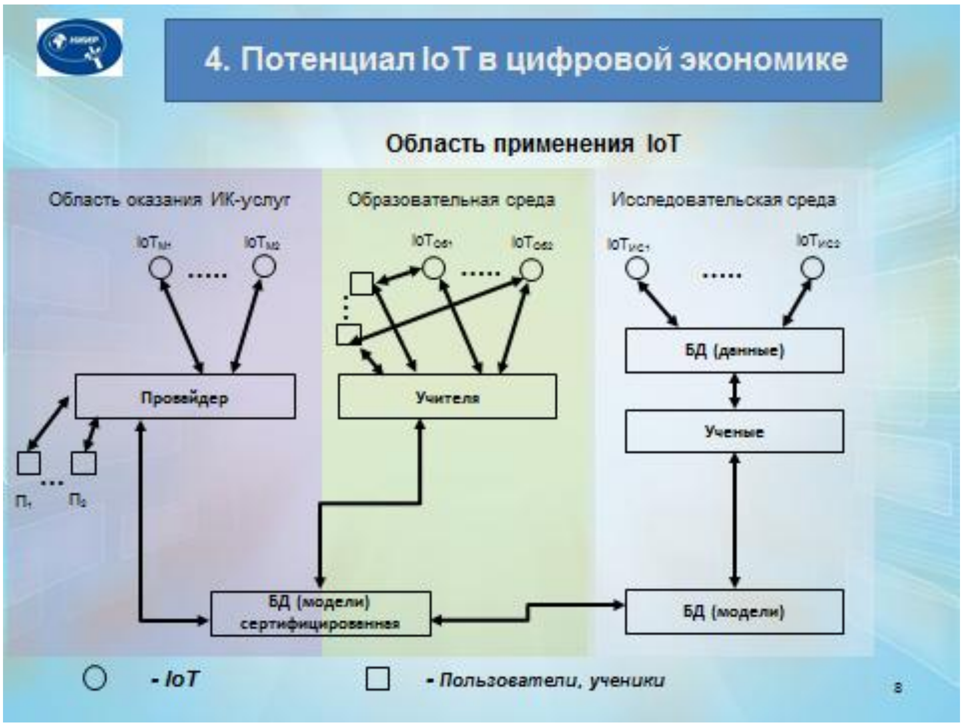


Рис. 1. Потенциал Интернета вещей в цифровой экономике

Отличие этой сферы использования MLS от второй сферы — сферы образовательных услуг, заключается в том, что стандартизация этих задач, поскольку ни связаны с образованием, осуществляется на большей территории и для большего количества пользователей, чем в первой сфере, где стандартизация (модели рационального поведения) может охватывать небольшое предприятие. Правда в случае транснациональных компаний, охват стандартизации может сравниться и даже превысить сферу.

Третья сфера использования MLS отличается от первых двух тем, что в этой сфере как раз на основе мониторинга окружающей природной и социальной сред с помощью IoTS, разрабатываются знания, то есть создаются модели, которые в дальнейшем могут использоваться для достижения большей рациональности в функционировании в первых двух сферах.

В связи со сложившимися условиями становятся актуальными по крайней мере две стратегические задачи в сфере пользования ИКТ. Во-первых, необходимо разработать типовые нормы законодательного обеспечения и реализации глобальных и локальных социотехнологических стандартов пользования ИКТ, позволяющих управлять качеством и безопасностью жизни и здоровья, образованием, бытом всех слоев населения, семьи и гражданина. Во-вторых, предстоит провести системную работу по созданию и развитию инфраструктуры ИКТ для самореализации и саморазвития общества и гражданина.

II. Мы вышли с предложениями в Государственную Думу Российской Федерации по развитию российского образовательного пространства и нормативно-правового регулирования с целью полноценного использования цифровых технологий в сфере образования. Эти предложения разработаны во исполнение пункта 5 Указа Президента Российской Федерации от 7 мая 2018 года № 204 – решения задачи национального проекта в сфере образования по созданию современной и безопасной цифровой образовательной среды, обеспечивающей высокое качество и доступность образования всех видов и уровней. Наши предложения прошли предварительные слушания в министерстве Высшего образования и науки и признаны Комитетом по образованию и науке ГД Федерального собрания Российской Федерации, как своевременные и правильные вещи.

Рис. 2. Профессор Русаков А.А. перед заседанием экспертных советов Комитета по образованию и науке

Член Экспертного Совета комитета по науке и образованию Русаков Александр Александрович выступил на расширенном заседании экспертных советов Комитета по образованию и науке ГД Федерального собрания РФ 24 октября 2018 г. Председательствовала на этом заседании Духанина Любовь Николаевна (заместитель председателя Комитета по науке и образованию). Тема заседания – *«Экспертный потенциал независимых ассоциаций в сфере образования»*. В работе заседания приняли участие руководители министерств, эксперты со всей территории Российской Федерации. В своем выступлении мы ознакомили присутствующих с нашими предложениями по инициации изменений в законодательство и подзаконные и другие нормативно-правовые акты в интересах совершенствования системы образования РФ.

Принципы синергетики, идеи самоорганизации, конструктивная роль хаоса нашли признание в науке XXI века. Общепризнанными в методологии научных исследований являются идеи и методы фрактальной геометрии, теории нечетких множеств, многозначных логик, мягкого моделирования и др. Сложная картина мира и сложная динамика его развития, теоремы Гёделя по мнению ученых (М. Клайн и др.) говорят об утрате определенности в математике. Но неопределенность в математике не может пониматься на «бытовом» уровне. Этот тезис, как стимул развития математики, всколыхнул общественное сознание. Созданное Владимиром Ивановичем Лобановым логическое исчисление [1; 4], было явно политизировано и названо «Русская логика». Лобанов В.И. выступал со своими проектами неоднократно на заседаниях государственной Думы Российской Федерации. Дело дошло до того, что в Научно-методический совет (НМС) по математике Минобразования Российской Федерации [2] из государственной Думы Российской Федерации пришел запрос об экспертизе целесообразности пересмотра и переиздания всех школьных учебников (не только по математике и информатике) на предмет изучения «Русской логики». Пришлось прочитать и проработать 500 страниц трудов Лобанова В.И., признаться в их значимости в техническом прогрессе создания интегральных схем, и дать отрицательный отзыв в Государственную Думу Российской Федерации от НМС, подготовленный совместно с ныне покойным руководителем НМС членом-корреспондентом РАН Л.Д. Кудрявцевым. Математика, математическая логика не нуждаются в защите, их средств достаточно для исследования сложной картины Мира и сложной динамики его развития.

НМС среди организаторов Всероссийского съезда преподавателей и учителей математики (6-7 декабря 2018 МГУ им. М.В. Ломоносова), заместитель председателя оргкомитета съезда член бюро НМС декан механико-математического факультета Московского университета, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа профессор Чубариков В.Н., выступивший на съезде с содержательным докладом о задачах подготовки студентов математиков. В своем выступлении на съезде заместитель председателя НМС Анатолий Григорьевич Ягола напомнил о важной для наших Советов проблеме — их деятельность не отражена в Законе об образовании Российской Федерации. Естественно, назрела проблема подготовки нормативных документов с предложениями регламента деятельности Советов, чтобы войти с этими предложениями в Комитет по образованию и науке ГД Федерального собрания Российской Федерации. Анатолий Григорьевич, развивая свой тезис, считает необходимым заручиться поддержкой предложений руководителями страны, которые присутствовали и выступали на съезде.

Мы считаем, что нужна рабочая группа (с квалифицированной юридической поддержкой) по подготовке этих предложений. НМС нуждается в решении поставленной проблемы для реализации целей, задач и программы своей деятельности. Наши силы приумножаются, благодаря притоку энтузиастов и заметной трансформации подходов и традиций, носителями которой является испытанная профессура и обладающая надежностью общеобразовательная школа. Будем оптимистами!

Список литературы

1. Лобанов В.И. Многозначная силлогистика без кванторов // Научно-техническая информация. Сер.2. Информационные процессы и системы. 1998. № 10. С.27-36.

2. Научно-методический совет по математике. URL: http://nuclphys.sinp.msu.ru/math/
3. Русаков А.А. О деятельности Академии информатизации образования: опыт и тенденции // Труды Международной научно-практической конференции «Информатизация образования–2018». 11–12 сентября 2018 г., г. Москва. В 2 ч. Ч. 1. М.: Изд-во СГУ, 2018. С.8-20.
4. Lobanov, V.I. (1998). The solution of logical equations. Documentation and Mathematical Linguistics. V. 5 (32). Pp. 16 – 27.

SOME ASPECTS OF DOMESTIC EDUCATION INFORMATIZATION IN THE CONDITIONS OF DIGITAL EDUCATIONAL ENVIRONMENT

A.A. Rusakov
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
vmkafedra@yandex.ru
Moscow

Moscow Technological University

Abstract. The evolution of a single global convergent infocommunication environment is discussed. The experience and prospects of interaction between the NMS in mathematics and the Committee on Science and Education of the State Duma of the Russian Federation are examined.

Keywords: educational machine systems, educational services, scientific and methodological advice on mathematics.

References

1. Lobanov, V.I. (1998). Multivalued syllogistics without quantifiers [*Mnogoznachnaya sillogistika bez kvantorov*]. *Scientific and technical information*. Ser. 2. Information processes and systems. V. 10. Pp. 27-36.
2. Lobanov, V.I. (1998). The solution of logical equations. Documentation and Mathematical Linguistics. V. 5 (32). Pp. 16 – 27.
3. Scientific and Methodological Council for Mathematics [*Nauchno-metodicheskij sovet po matematike*]. URL: http://nuclphys.sinp.msu.ru/math/
4. Rusakov, A.A. (2018). On the activities of the Academy of Education Informatization: Experience and Trends [*O deyatel'nosti Akademii informatizacii obrazovaniya: opyt i tendencii*]. *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Education Informatization-2018"*. September 11–12, 2018, Moscow. At 2 hours, Part 1. Moscow. Pp.8-20.

УДК 372.851

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ НАЧАЛАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Тамара Юрьевна Рябова
Учитель математики, заместитель директора школы
tamarik@inbox.ru
г. Фрязино, Московская область

МОУ СОШ №1 СУИОП г. Фрязино Московской области

Аннотация. В статье описана система педагогических условий формирования финансовой грамотности школьников как структурного элемента математической грамотности при обучении началам математического анализа учащихся средней школы. Предложены следующие элементы системы: математическое содержание как основа для раскрытия финансового содержания, проектный метод обучения, обучение в команде, исследовательские методы обучения, использование ИКТ, метапредметные результаты, поисковая активность, использование математического моделирования, применение кейс-технологий при формировании финансовой грамотности.

Ключевые слова: педагогические условия, финансовая грамотность, математическое моделирование, методы обучения, кейс-технологии.

Благодарности: Выражаю благодарность моему бессменному руководителю Татьяне Федоровне Сергеевой, оказывающей мне на протяжении многих лет поддержку и содействие в научных изысканиях.

Современный выпускник основной средней школы – это молодой человек, который обладает определенным набором развитых компетентностей, в том числе и социальных. Финансовая грамотность является одной из социальных компетентностей.

Формирование финансовой грамотности школьников в процессе изучения начал математического анализа требует внесения изменений в традиционную, привычную для большинства учителей методику преподавания.

Представим систему педагогических условий процесса формирования финансовой грамотности школьников в процессе изучения начал математического анализа в профильной школе.

1. Математическое содержание материала, изучаемого на уроках начал математического анализа, с одной стороны, является основой для раскрытия и уточнения понятийного аппарата финансовой грамотности ученика. С другой стороны, наполнение изучаемого материала финансовым содержанием создает контекст для освоения математического аппарата в реальных ситуациях. С точки зрения такого подхода содержание дисциплины «Начала математического анализа» является эффективным средством для формирования достаточного уровня финансовой грамотности школьника, так как позволяет овладеть реальными приемами обработки финансовой информации, представленной в числовом виде, а также создает основу для развития логического мышления, умения принимать решения в неопределенных ситуациях.

2. Один из главных способов формирования финансовой грамотности – реализация проектного метода обучения, который направлен на освоение конкретного социального финансово-экономического опыта. Для реализации этого подхода к решению

проблемы формирования финансовой грамотности при изучении начал математического анализа учитель должен сам владеть основами проектного метода, уметь привлекать современные технологии и обладать достаточным для обучения уровнем финансовой грамотности. Учащиеся, уже имеющие некоторый реальный финансово-экономический опыт, могут реализовать себя в проектной деятельности.

3. Обучение финансовой грамотности может эффективно осуществляться через обучение в сотрудничестве, через организацию командной, групповой работы, которые могут рассматриваться как совместная развивающая деятельность учителя и учеников, способствующая социализации школьников. Для реализации этого подхода учитель математики должен свободно владеть указанными формами организации обучения, а в образовательной программе профильной школы должны быть предусмотрены временные ресурсы в виде внеурочной деятельности.

4. При формировании финансовой грамотности учащегося педагог имеет дело с содержанием изучаемого материала, которое направлено на социализацию личности и учитывает субъектный опыт школьника, поэтому будем полагать, что одним из важных ресурсов формирования финансовой грамотности учащихся в процессе изучения начал математического анализа является применение исследовательских методов обучения, использование всех шагов учебной исследовательской деятельности. Участие ученика в работе школьных научных обществ, обсуждение результатов целенаправленной работы школьников на конференциях и научных фестивалях непременно будет способствовать расширению мотивации и повышению интереса самих школьников к вопросам финансовой грамотности.

5. Использование информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) в процессе изучения начал математического анализа с привлечением специально подобранных задач позволяет обогащать содержание предмета за счет расширения среды и ознакомления учащегося с современными тенденциями и процессами в финансовой и экономической сферах жизни, доступными для его понимания. К ним, например, относятся криптовалюта, создание виртуальных производств, интернет-кафе. В настоящее время невозможно проектировать процесс обучения без использования ИКТ, помогающих не только оптимизировать, сократить рутинную работу школьника, но и способствующих творческому развитию личности. На наш взгляд, необходимо использовать межпредметные связи между математикой и информатикой, предлагая решать поставленные задачи с финансовым содержанием.

Одним из основных условий формирования финансовой грамотности, является ориентация на достижение метапредметных результатов через обучение математике. К метапредметным относятся такие результаты обучения, как:

- самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учебной и познавательной деятельности, развивать ее мотивы и интересы;
- самостоятельно планировать способы достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;
- соотносить свои действия с запланированными результатами, осуществлять мониторинг своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы деятельности с учетом предложенных условий и требований, корректировать познавательную деятельность в соответствии с меняющейся ситуацией;
- оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности её решения;
- осуществлять самоконтроль, самооценку, принимать решения и делать осознанный выбор в учебной и познавательной деятельности;
- определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, классифицировать, устанавливать

причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы;

- создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;

- организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками; работать индивидуально и в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение;

- осознанно использовать речевые средства в соответствии с задачей коммуникации для выражения своих чувств, мыслей и потребностей; планирования и регуляции своей деятельности; владение устной и письменной речью, монологической контекстной речью;

- формировать и развивать компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий;

- формировать и развивать экологическое мышление, применять его в познавательной, коммуникативной, социальной практике и профессиональной ориентации.

6. Формирование поисковой активности – одна из самых сложных педагогических задач, решаемых в процессе обучения математике. Можно добиться хороших результатов при учете многих обстоятельств: индивидуальных способностей школьника, условий воспитания в семье, склонности педагога к предоставлению поисковой свободы школьникам и некоторых других. Так как цель - формирование финансовой грамотности учащегося, которая будет реализовываться в мало предсказуемых условиях реальной жизни, необходимо обучить школьника такому поведению в реальных условиях, когда самостоятельный поиск способов решения поставленной задачи, а затем и выбор наиболее эффективного способа поведения приведет к необходимым результатам.

7. Один из эффективных методов формирования финансовой грамотности – математическое моделирование. Математическое моделирование является одним из основных современных методов познания мира. Создавая математическую модель той или иной финансово-экономической ситуации и исследуя ее математическими методами, учащиеся получают возможность приобрести навыки, которые легко переносятся в реальную ситуацию. Это происходит, потому что задача математического моделирования — установить главные, характерные черты явления или процесса, его определяющие особенности, а математические методы помогают описать и изучить эти особенности с помощью математического анализа, предсказать их развитие.

8. Одним из наиболее продуктивных способов формирования финансовой грамотности является применение кейс-технологий, в основе которых лежит создание проблемной ситуации на примере из реальной жизни школьника. Например, для старшеклассников одной из самых актуальных тем является выбор образовательной траектории в будущем, а именно: поступление в высшее учебное заведение, планирование финансовых затрат, необходимых для реализации этой идеи, выбор оптимального варианта решения проблемы и математическое обоснование выбранного варианта. Другой реальной проблемой для многих старшеклассников является накопление средств на приобретение желанного предмета (велосипеда или телефона современной модели и так далее). Именно в таком контексте конструируется многофакторная ситуация, результатом исследования которой будет приобретение конкретных математических и финансовых навыков поведения. Таким образом, решение понятной, грамотно сформулированной проблемы из области финансов в сочетании с математическим материалом, опирающимся на основы математического анализа, проблемы, которая не имеет однозначного решения, зависящего от сложившегося мировоззрения и личного опыта школьников, финансового и математического, приводит к тому, что школьники приобретают финансовую грамотность на определенном уровне, который задается исследуемой ситуацией и который может быть заранее спланирован.

Рассмотренная система педагогических условий применяется нами в обучении и позволяет формировать определенный уровень финансовой грамотности у старших школьников.

Список литературы

1. Болотов В. А. Состояние математического образования в РФ: общее среднее образование (аналитический обзор) // Проблемы современного образования. 2012. № 6. С. 32-47. URL: http://pmedu.ru/res/2012_6_3.pdf (дата обращения: 28.08.2019).
2. Жаворонкова Т.И. Case-технологии на уроках математики. URL . https://urok.1sept.ru/593299 (дата обращения: 16.08.2019).
3. Стратегия повышения финансовой грамотности в РФ на 2017-2023 годы. URL: https://fmc.hse.ru/strategy (дата обращения: 28.08.2019).
4. Финансовая грамотность российских учащихся (по результатам международной программы PISA-2012. URL: http://www.centeroko.ru/pisa12/pisa12_pub.html (дата обращения: 16.08.2019).

PEDAGOGICAL CONDITIONS FOR FORMING FINANCIAL LITERACY IN TEACHING THE BASIS OF MATHEMATICAL ANALYSIS IN SECONDARY SCHOOL

T.Y. Ryabova
Math teacher, deputy director of the school
tamarik@inbox.ru
Fryazino, Moscow region

MOU Secondary School No. 1 SUIOP Fryazino, Moscow Region

Abstract. The article describes the system of pedagogical conditions for the formation of financial literacy of students as a structural element of mathematical literacy in teaching the principles of mathematical analysis of secondary school students. The following elements of the system are proposed: mathematical content as the basis for disclosing financial content, project training method, team training, research teaching methods, the use of ICT, meta-subject results, search activity, the use of mathematical modeling, the use of case technologies in the formation of financial literacy.

Keywords: pedagogical conditions, financial literacy, mathematical modeling, teaching methods, case technology.

References

1. Bolotov, V. A. (2012). The state of mathematical education in the Russian Federation: general secondary education (analytical review) [Sostoyanie matematicheskogo obrazovaniya v RF: obshchee srednee obrazovanie (analiticheskiy obzor)]. *Problems of modern education*. V. 6. Pp. 32-47. URL: http://pmedu.ru/res/2012_6_3.pdf
2. Zhavoronkova, T.I. Case-technology in mathematics lessons [*Case-tekhnologii na urokakh matematiki*]. URL: https://urok.1sept.ru/593299
3. Strategy for improving financial literacy in the Russian Federation for 2017-2023 [*Strategiya povysheniya finansovoy gramotnosti v RF na 2017-2023 gody*]. URL: https://fmc.hse.ru/strategy.

4. Financial literacy of Russian students (based on the results of the international program PISA-2012 [*Finansovaya gramotnost' rossiyskikh uchashchikhsya (po rezul'tatam mezhdunarodnoy programmy PISA-2012*]. URL: http://www.centeroko.ru/pisa12/pisa12_pub.html

УДК 378.147

РЕФЛЕКСИЯ КАК КОМПОНЕНТ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Татьяна Петровна Фомина
к.ф.-м.н., доцент
e-mail: fomina_t_p@mail.ru
г. Липецк

Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, кафедра математики и физики

Аннотация. В статье обсуждаются некоторые пути формирования рефлексии в процессе подготовки будущих учителей математики в ходе лекционных и практических занятий по дисциплинам «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Теория игр и исследование операций».

Ключевые слова: математическое образование, подготовка будущего учителя математики, рефлексия, рефлексивная деятельность.

В структуре урока, соответствующего требованиям современных государственных образовательных стандартов [3], рефлексия является обязательным этапом, в ходе которого учащиеся самостоятельно оценивают свое состояние, свои эмоции, результаты своей деятельности. И задача педагога создать для ученика такие условия, чтобы он захотел говорить о проведенном уроке или своей деятельности. Поэтому начинающему учителю нужно обязательно быть компетентным в этой области. Но все ли будущие учителя осознают важность проведения на уроке рефлексии? Поскольку «рефлексивные процессы должны постоянно пронизывать всю деятельность обучающихся» [2, с. 553], то умение будущего учителя математики проводить рефлексию нуждается в целенаправленном формировании.

Анализируя основные направления развития математического образования в современном мире, нельзя не отметить наличие противоречия между непрерывно повышающимися требованиями к уровню математической подготовки студентов и фактическими знаниями обучающихся в области математики. Многие педагоги исследуют сущность, структуру и процесс математической подготовки студентов вузов с позиции развития профессиональной компетентности будущего специалиста. Поэтому говорим о подготовке будущего учителя математики. Под математической подготовкой студента будем понимать систему сформированных у него знаний, умений и навыков, а также способов действий по овладению этими знаниями, которые необходимы ему для успешного осуществления учебной, профессиональной и научной деятельности.

Задачей высшего педагогического образования является подготовка профессионально мобильного педагога, его готовность к инновационной и профессиональной деятельности [4]. Математическая культура обеспечивает реализацию этих задач, а изучение математических дисциплин способствует формированию ее каждого компонента, в частности, рефлексивного. «Рефлексия – принцип человеческого мышления, направляющий его на осмысление и осознание собственных знаний и поступков» [1, с. 219].

Рефлексия как компонент профессиональной подготовки, по мнению многих исследователей, ученых и педагогов, должна содержать систему знаний, умений и навыков студентов, которые позволили бы им осознать и оценить готовность у них математической культуры и успешности деятельности по ее развитию. Что, в свою очередь, должно способствовать формированию познавательной активности и познавательной самостоятельности студентов.

Для определения способов формирования рефлексии у будущих учителей математики (профиль «Математика и Физика», «Математика и Информатика») было проведено анкетирование студентов третьего и пятого курсов. Анализ результатов опроса показал, что большая часть (59%) – сторонники рефлексии, Также есть студенты, которые не определились с выбором: проводить или нет рефлексию на занятиях (30%), и третья часть студентов – категорически против ее проведения (11%). При этом студенты указали различные причины за ее проведение и против. Это позволило сделать вывод о наличии проблем при организации рефлексивной деятельности в учебном процессе.

Наша задача – научить студентов рефлексивной деятельности, сформировать внутреннюю готовность и потребность ее осуществления. Мы предлагаем несколько способов решения этой задачи при проведении занятий по «Теории вероятностей и математической статистике» и «Теории игр и исследованию операций».

Рефлексию следует проводить на всех занятиях, независимо от их формы.

1) *Лекционные занятия*. Провести рефлексию сразу после доказательства, например теоремы (предлагается осмыслить и проанализировать условия и алгоритм доказательства) или сразу после прочтения лекции (предложив контрольные вопросы по изложенному материалу для проверки усвоения знаний). При проведении лекционных занятий указанных дисциплин по всем темам предлагаются контрольные вопросы. Так по теме «Повторные независимые испытания» обсуждаются следующие вопросы:

1. Независимые испытания;
2. Схема Бернулли;
3. Формула Бернулли;
4. Многоугольник распределения вероятностей.

По теме «Основные понятия исследования операций» предложены были следующие вопросы:

1. Что понимается под исследованием операций?
2. Основная задача исследования операций.
3. Как определяется оперирующая сторона?
4. Исследователь операции – это…
5. Как определяется математическая модель операции?
6. Что называется стратегией?
7. Что такое неконтролируемые факторы?
8. Критерий эффективности – это….

Несомненно, их обсуждение способствует лучшему усвоению материала и активизирует студентов на познавательную деятельность.

В процессе обсуждения отмечаем у студентов трудности, возникающие при выражении собственных мыслей. Причины трудностей заключаются в том, что обучающиеся отвлекаются во время лекции и упускают ключевые моменты или просто забывают о вопросах, которые у них возникли во время восприятия материала. В связи с этим мы предлагаем студентам отмечать то, что осталось для них непонятным, что было сложно, какие возникли вопросы и т.п., а затем проводить рефлексивный анализ. Это помогает учащимся скоординировать свои мысли, сосредоточиться на материале, объяснить почему не ответили на поставленный вопрос. В свою очередь, преподаватель должен обратить внимание на формы и средства изложения материала и сделать лекцию более интересной для студентов.

2) *Практические занятия*. При изучении разделов целесообразно проводить систематизацию материала с соответствующим подбором задач, тестов, после чего рассматривать нестандартные задачи. Задачи должны быть разнообразными, чтобы не затухала мыслительная деятельность студентов. Поэтому на практических занятиях

рефлексию можно проводить после разбора примера по прочтенной лекции. Так по теме «Эмпирическая функция распределения выборки» предлагается задача:

Если $F^*(x)$ *– эмпирическая функция распределения для выборки, представленной статистическим рядом*

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

то произведение $10\,F^*(5)\cdot F^*(9)$ *равно …*

Затем предлагаем задачи для контроля знаний после самостоятельного решения примеров. Так после выполнение заданий на построение интервальных оценок параметров распределений можно предложить следующие задачи:

1) *Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака X имеет вид* (α; 24.5). *Если выборочная средняя равна 22.4, то значение α равно…*

2) *Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака X имеет вид* (30, 40). *Тогда при уменьшении надежности* (*доверительной вероятности*) *оценки доверительный интервал может принять вид*

a) (30,2; 39,8); *b*) (29,9; 40,1); *c*) (30,05; 39,8).

По теме «Матричные игры»:

1) Для следующих игр с матрицей найдите оптимальное решение в чистых стратегиях:

a) A=$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; b) A=$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2) Покажите, что матричная игра с a_{ij}=i-j, i=$\overline{1,n}$, j=$\overline{1,m}$ имеет решение в чистых стратегиях и найдите его.

3) Укажите область значений a и b, для которых ситуация (2,2) будет седловой точкой:

A=$\begin{pmatrix} 1 & b & 6 \\ a & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4). Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ и A=$\begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_3 \\ a_1 & a_6 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$. Покажите, что любая оптимальная стратегия такой игры удовлетворяет условиям: $p_3 = q_2 = 0$, $p_1 > 0.5$, $p_1 > q_1 > p_2$, $a_3 < v < a_4$.

5) Проверьте, являются ли стратегии p и q оптимальными в игре с матрицей:

a) A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, p=(2/3, 1/3), q=(0, 1, 0);

b) A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, p=(0, 0, 1), q=(0.4, 0.6, 0).

6) Составьте матрицу выигрышей игры по заданным оптимальным стратегиям и цене игры p=(0.2, 0.8), q=(0.4, 0.6), v=2.4;

После этого проводим сравнение результатов рефлексии, что позволяет проследить за степенью формирования рефлексии.

Затем проводим рефлексию после изучения темы или раздела дисциплины. Здесь можно предложить тест, а потом обсудить его результаты.

Приведем некоторые вопросы теста по теме «Линейное программирование»:

1) При переходе от общей ЗЛП к ЗЛП в канонической форме все ограничения-неравенства со знаком $\le$ заменяются на равенства добавлением неотрицательных переменных с коэффициентом

a) +1; b) -1; c) 0.

2) При переходе от общей ЗЛП к ЗЛП в канонической форме все ограничения-неравенства со знаком $\ge$ заменяются на равенства добавлением неотрицательных переменных с коэффициентом

a) +1; b) -1; c) 0.

3) *Привести ЗЛП* $f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max$ *при* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 6 \\ x_2 + x_3 \ge 7 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$ *к канонической форме. Ограничения будут иметь вид*:

$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 7 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$.

4) *Для системы уравнений* $\begin{cases} x_1 - x_3 + 5x_4 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$ *укажите допустимые вектора*

$a)\ x(4,8,1,0)$; $b)\ x(9,12,1,0)$; $c)\ x(8,15,0,0)$.

5) *Функция* $f(x) = x_1 - x_2 \to \max$ *на множестве* $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$ *принимает наибольшее значение* *a*) 3; *b*) 5; *c*) 8.

Слушая и анализируя ответы одногруппников и преподавателя, студенты учатся анализировать свою работу, рассуждать, грамотно формулировать свои мысли, оценивать свои результаты, правильно расставлять акценты в учебной деятельности. Все это способствует развитию мотивации к обучению и познавательных интересов студентов.

Список литературы

1. Коджаспирова Г.М., Коджаспиров А.Ю. Словарь по педагогике. М., Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005.
2. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. М.: Синтег, 2007.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. (Утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 29 декабря 2014 г. № 1644). URL: http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70764706/#review (дата обращения: 08.08.2019).
4. Фомина Т.П. О некоторых аспектах профессиональной подготовки будущего учителя математики // Инновационные процессы в естественно-математическом образовании и

развитие профессиональных компетентностей педагога в условиях реализации ФГОС: материалы XXI Межрегиональной научно-практической конференции «Актуальные проблемы естественно-математического образования». Липецк: ГАУДПО ЛО «ИРО», 2018. С. 165-169.

REFLECTION AS A COMPONENT OF PROFESSIONAL TRAINING OF FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS

T.P. Fomina
Cand. of Sciences (Physics, Mathematics), associate Professor
e-mail: fomina_t_p@mail.ru
Lipetsk

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Department of mathematics and physics

Abstract. The article discusses some ways of forming reflection in the training of future teachers of mathematics during lectures and practical classes in the disciplines of "Probability theory and mathematical statistics" and "game Theory and operations research".

Keywords: students, mathematical education, training of future mathematics teacher, reflection, reflexive activity.

References

1. Kodzhaspirova, G.M., Kodjaspirov, A.Yu. (2005). Dictionary of pedagogy [*Slovar' po pedagogike*]. M., Rostov n / a: Publishing center "Mart".
2. Novikov, A.M., Novikov, D.A. (2007). Methodology [*Metodologiya*]. M .: Sinteg.
3. The federal state educational standard of basic general education. (Approved by order of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation of December 29, 2014 No. 1644). [*Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart osnovnogo obshchego obrazovaniya. (Utv. prikazom Ministerstva obrazovaniya i nauki RF ot 29 dekabrya 2014 g. № 1644)*]. URL: http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70764706/#review (accessed 08.08.2019).
4. Fomina, T.P. (2018). About some aspects of professional training of a future teacher of mathematics [*O nekotorykh aspektakh professional'noy podgotovki budushchego uchitelya matematiki*]. Innovative processes in natural-mathematical education and the development of professional competencies of a teacher in the context of the FSES: materials of the XXI Interregional scientific-practical conference "Actual problems of natural-mathematical education". Lipetsk: GAUDPO LO “IRO”. Pp. 165-169.

УДК 372.851

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ КАК СРЕДСТВО ВОСПИТАНИЯ У УЧАЩИХСЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ

Татьяна Ивановна Кузнецова
д.п.н., доцент
kuzti45@gmail.com
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Никита Александрович Казаков
alphan95@mail.ru,
г. Москва
ГОУ ВО МО «Московский государственный областной университет»

Аннотация. Одной из ярких тем для работы с учащимися является тема «Математические софизмы». Математические софизмы могут рассматриваться обучающимися различных классов, в зависимости от изучаемого урочного или внеурочного материала. В широком классе задач на математические софизмы выделяют: арифметические, алгебраические и геометрические софизмы. В исследованиях [1, 2] описана работа по ознакомлению школьников с геометрическими софизмами. В настоящем исследовании показываются ситуации, в которых учащиеся сталкиваются с необходимостью поиска ошибки в алгебраическом преобразовании, используемом в ходе решения какой-либо алгебраической задачи. Обычно при этом выявляется неравносильный алгебраический переход.

Ключевые слова: обучение математике, алгебраические софизмы, метод поиска ошибки.

Часто в логике, философии и математике встречается понятие «софизм». Понятие «софизм» происходит от греческого слова «sophisma»: уловка, выдумка, ухищрение. По словарю Ожегова, софизм – формально кажущееся правильным, но по существу ложное умозаключение, основанное на неправильном подборе исходных положений. Софистами называли учителей-наставников, задачей которых являлось развитие у своих учеников умения выражать свои мысли, проводить логические умозаключения и убедительно защищать любую свою точку зрения [3].

Математический софизм представляет собой некоторое математическое утверждение с приведённым к нему доказательством или обоснованием, в котором скрыта ошибка. Эта ошибка и приводит к противоречивости исходного суждения. Основная задача – поиск скрытой ошибки.

Содержание школьной программы по математике не подразумевает рассмотрение математических софизмов. Однако привнесение задач-софизмов в образовательный процесс может заметно повысить его качество. Решение софизмов ведёт к более глубокому понимаю предмета, способствует развитию аналитического мышления [4].

Задачи-софизмы, которые используются в ходе урока, можно условно разделить на два типа: алгебраические и геометрические. Логические и арифметические софизмы – отдельные задачи, которые можно рассматривать во внеурочное время. В настоящей статье рассмотрим примеры алгебраических софизмов и покажем их роль и пользу в ходе обучения математике.

Пример 1. *Любое число равно меньшему числу.*

Пусть $a > b \Rightarrow a = b + c, c \neq 0$. *Домножим последнее равенство на разность* $a - b$, *получим* $a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc \Rightarrow a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc \Rightarrow a(a-b-c) = b(a-b-c)$. *Разделим последнее равенство на общий множитель и получим*: $a = b$.

Как следствие этой задачи можем заключить, что 2=5 или 2+2=5, так как 4=5.

При демонстрации софизма школьники должны установить и обосновать, где допущена ошибка. В данном случае она допущена при делении на общий множитель. Обучающиеся должны помнить, что ***каково бы ни было равенство, его части можно разделить или умножить на одно и то же число, отличное от нуля.*** В данном примере выражение $a-b-c=0$, что легко заметить, обращаясь к условию $a=b+c$.

Пример 2. 1 *рубль* = 10000 *копейкам*.

Всем известно, что 1 *рубль* = 100 *копейкам*, 10 *рублей* = 1000 *копейкам. Перемножим части этих равенств, получим*: 10 *рублей* = 100000 *копейкам. Разделив последнее равенство на* 10, *получим*: 1 *рубль* = 10000 *копейкам*.

Данную задачу можно предложить классу при изучении мер величин. Обучающиеся должны хорошо помнить, что, ***прежде чем осуществлять какие-либо действия с именованными числами, необходимо понять, что при этом нельзя игнорировать размерности!*** Найдём ошибку в рассуждениях. Первое, что было сделано в предложенном решении — были почленно перемножены два верных равенства:

$$1\ \textit{руб.} = 100\ \textit{коп.},$$
$$10\ \textit{руб.} = 1\,000\ \textit{коп.} \qquad (*)$$

На самом деле после этого получилось равенство

$$10\ \textit{руб.}^2 = 100\,000\ \textit{коп.}^2$$

Далее, чтобы получить искомое соотношение между рублями и копейками, надо разделить не просто на 10, а на 10 руб.:

$$10\ \textit{руб.}^2 / 10\ \textit{руб.} = 100\,000\ \textit{коп.}^2 / 10\ \textit{руб.} \quad (**)$$

В левой части всё ясно – получаем 1 *руб.* А вот приступая к работе с правой частью, надо вспомнить, что, ***прежде чем осуществлять какие-либо действия с именованными числами, необходимо сначала привести их к одной и той же единице измерения,*** что мы и делаем, используя верное равенство (*)**:**

$$100\,000\ \textit{коп.}^2 / 10\ \textit{руб.} = 100\,000\ \textit{коп.}^2 / 1\,000\ \textit{коп.} = 100\ \textit{коп.}$$

Таким образом, в данном софизме актуализируется операция перевода из одной величины в другую, что в дальнейшем будет способствовать формированию основных действий с десятичными дробями.

Замечание. Настоящий пример очень популярен и активно используется в разных вариациях литературы о софизмах (см., например, [5; 6]). В данном примере, как и во многих других, мы вынуждены обратить внимание учащихся не только на математические ошибки, которые мы уже обсудили, но и на необходимость бережного отношения к русскому математическому языку, т. е. к правильному чтению математических текстов. Поскольку в рассматриваемом софизме имена пишутся полностью (не в сокращённом виде – руб. и коп.), то можем утверждать, что из пяти случаев использования имени «копейки» только в одном, а именно, во втором случае, это сделано правильно:

1 *рубль* = 100 *копейкам* (читаем так: один рубль равен ста копейкам).

Во всех остальных случаях следует говорить «копеек». В первом и последнем случаях:

1 *рубль* = 10000 *копейкам* (читаем так: один рубль равен десяти тысячам копеек);

в третьем случае:

10 *рублей* = 1000 *копейкам* (читаем так: десять рублей равны тысяче копеек)

и, наконец, в четвёртом случае:

1 *рубль* = 100000 *копейкам* (читаем так: один рубль равен ста тысячам копеек).

Пример 3. *Из неравенства* $a > b$ *следует неравенство* $a > 2b$ (*здесь* a, b — *произвольные положительные числа).*

Из неравенства $a > b$ *почленным умножением на* b *получаем*:

$$a \cdot b > b^2.$$

Вычтем из обеих частей полученного неравенства a^2:

$$a \cdot b - a^2 > b^2 - a^2.$$

Полученное неравенство разделим почленно на $b - a$:

$$a > b + a.$$

Сложив полученное неравенство с исходным, получим:

$$2a > 2b + a \Rightarrow a > 2b.$$

Данный софизм полезно рассмотреть при решении простейших неравенств. Распространенная ошибка школьников – при умножении (делении) частей неравенства на отрицательное число знак неравенства ошибочно сохраняют. Приведённый пример как раз рассчитан на подобную невнимательность класса. Следует обратить внимание на то, что при почленном делении неравенства на $b - a$ знак неравенства должен измениться на противоположный, поскольку разность $b - a < 0$. Последнее очевидно из условия $a > b$. Приведём ещё один пример, связанный с похожей ошибкой.

Пример 4. $\frac{1}{8}$ *больше* $\frac{1}{4}$.

Перемножая почленно соотношения $\lg\frac{1}{2} = \lg\frac{1}{2}$ и $3 > 2$, *получаем:*

$$3 \cdot \lg\frac{1}{2} > 2 \cdot \lg\frac{1}{2};$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{8} > \frac{1}{4}.$$

У обучающихся на первый взгляд возникает мнение, что никакой ошибки не допущено. Тем не менее, результат парадоксален. Такой софизм целесообразно приводить школьникам при изучении основных действий с логарифмами. В данном случае актуализируется сравнение логарифма с нулём. Обучающиеся должны, прежде всего, установить, что $\lg\frac{1}{2} < 0$. В связи с этим фактом, как и в прошлом примере, знак неравенства после почленного перемножения должен поменяться на противоположный, поскольку проводится умножение обеих частей неравенства $3 > 2$ на отрицательное число $\lg\frac{1}{2}$. Однако в приведённом решении знак сохранился, в этом и заключена ошибка.

Пример 5. $-1 > +1$.

Если в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *левая дробь больше* 1, *то правая дробь также больше* 1; *другими словами, из неравенства* $a > b$ *следует* $c > d$. *Основное свойство пропорции*:

$$a \cdot d = b \cdot c,$$

очевидно, не нарушается, если положить

$$a = 1; b = -1; c = -1; d = +1.$$

Здесь $a > b$ *и, следовательно, должно быть* $c > d$, *т.е.* $-1 > +1$.

Этот пример направлен на развитие общего логического мышления и внимательности. Задача школьников – установить противоречие между условием и промежуточными умозаключениями приведённого доказательства. Противоречие состоит в том, что при $a = 1; b = -1$ получаем $\frac{a}{b} = \frac{1}{-1} = -1 < 1$, что противоречит тому условию, что левая дробь больше 1.

Пример 6. *Решить уравнение* $\sqrt{x} + x = 2$.

$$\sqrt{x} + x = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - x \Rightarrow x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Находим корни последнего уравнения: $x_1 = 4; x_2 = 1$.

Подставляем первый корень в исходное уравнение, получаем $6 = 2$. При получении корней уравнения школьников всегда приучали делать проверку, т. е. устанавливать, все ли полученные корни удовлетворяют исходному равенству. Корни, которые не удовлетворяют равенству, отбрасывают. Но в связи с чем возникают «лишние» корни? Целесообразно поставить этот вопрос школьникам. Наверняка, первым ответом школьников будет формулировка условия неотрицательности подкоренного выражения $x \geq 0$. Однако полученные корни удовлетворяют этому условию. Чтобы выявить ошибку в решении, необходимо убедиться в равносильности приведённых переходов. Когда выражение $\sqrt{x} = 2 - x$ возводится в квадрат, необходимо поставить условие неотрицательности его правой части, т. е. $2 - x \geq 0$, откуда получаем $x \leq 2$. Без постановки данного условия возведение в квадрат не является равносильным переходом. В отсутствии этого условия и заключена ошибка. Проверяя полученные корни на условие $x \leq 2$, устанавливаем, что уравнение имеет единственное решение $x = 1$, дальнейшая проверка не требуется. Приведённую задачу можно использовать при решении уравнений, содержащих радикалы. После разбора софизма в качестве упражнения можно предложить аналогичную задачу на решение уравнения $3\sqrt{x} + x + 2 = 0$; ожидаемый результат – уравнение не имеет корней. При решении уравнений различного типа, необходимо ставить вопрос о возможном существовании корней и их количестве, определяемое наибольшей степенью неизвестной величины. Таким образом, надо заметить, что предложенные уравнения не могут иметь более одного корня.

При решении уравнений с неизвестным в знаменателе довольно часто учащиеся забывают предварительно найти ОДЗ и, естественно, в заключение проверить полученные корни на принадлежность ОДЗ. В этом смысле показателен следующий софизм.

Пример 7. *Решить уравнение* $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$.

$$\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2} \Leftrightarrow 1 + 3(x-2) = 3 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Подставляем найденный корень 2 в уравнение и в знаменателях обеих частей получаем нули. Учащиеся вспоминают, что на нуль делить нельзя, откуда следует, что обе части данного уравнения не имеют смысла и, следовательно, число 2 не является корнем.

Отсутствие ОДЗ в приведённом решении свидетельствует о недостаточности аргументов, а первый же переход (от первого уравнения ко второму) неравносилен, т. е. сделан с нарушением правила умозаключения – равносильности. Кроме того, полученный корень оказался тем самым значением, которое нарушает равносильность рассмотренного перехода.

В результате проведённых обсуждений учащиеся должны запомнить, что представленный в софизме способ решения уравнений с неизвестным в знаменателе тоже имеет право на существование, но при двух условиях: 1) не надо писать между записями уравнения знак эквивалентности и 2) для полученных значений неизвестных, претендующих на звание корней, необходимо провести проверку (соответствующую определению корня), как это было сделано в наших вариантах решения примера 6 и настоящего примера. Однако такой способ решения неприемлем для неравенств. Учитывая то, что часто уравнения и неравенства рассматриваются вместе (в системе), мы всё-таки предпочитаем более общий способ — с использованием понятия ОДЗ (уравнения, неравенства, их систем) [7; 8, с. 143–144].

Алгебраические софизмы могут служить «подводящими» задачами, т. е. задачами, которые актуализируют изучение какого-либо нового материала.

Пример 8. *Решить уравнение* $1{,}3247^x + 1{,}3247^{x+1} + 1{,}3247^{x+2} = 1{,}3247^6$.

Числа везде одинаковые, поэтому можем приравнять показатели, получим:

$$x + (x+1) + (x+2) = 6 \Rightarrow 3x + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$$

Проверка показывает, что результат неверен. Значит, выбранный нами способ решения задачи не является верным. Данную задачу можно задать как подводящую при изучении способов решения показательных уравнений и неравенств. Актуализируются свойства степени, а также метод замены. Действительно, сделав замену

$$y = 1{,}3247^x$$

и воспользовавшись формулой произведения степеней с одинаковыми основаниями, преобразуем данное уравнение в следующее:

$$y + 1{,}3247\, y + 1{,}3247^2\, y = 1{,}3247^6,$$

откуда выражаем y:

$$y = 1{,}3247^6 / (1 + 1{,}3247 + 1{,}3247^2).$$

Теперь легко написать ответ:

$$x = \log_{1{,}3247} y = \log_{1{,}3247} [1{,}3247^6 / (1 + 1{,}3247 + 1{,}3247^2)].$$

Таким образом, математические софизмы могут служить отличным дополнением к содержанию основной программы обучения математике. Мы наблюдаем широкие возможности их применения к различным разделам алгебры и геометрии, а также их различную целевую направленность: для актуализации, систематизации и обобщения знаний. Такие задачи также используются для переключения внимания и снятия напряжения. Не случайно в интернете можно найти далеко не одну самостоятельную работу, посвящённую софизмам, выполненную учащимися, см., например, исследовательскую работу по теме «Софизмы и парадоксы», выполненную учеником 6Б класса воронежского лицея № 1 Хохловым Кириллом (руководитель: учитель математики Казьменко Е.А.) [6]. По нашему мнению, грамотному педагогу привносить задачи такого рода в процесс обучения вполне целесообразно, поскольку они способствуют реализации принципов проблемно-развивающего обучения, активизации образовательного процесса и, следовательно, повышению его эффективности, что, в конечном счёте, воспитывает у учащихся высокую математическую культуру.

Список литературы

1. Казаков Н.А., Кузнецова Т.И. Из истории терминов "модель" и "моделирование". Часть 3. Чертежи — модели задач // Проблемы учебного процесса в инновационных школах: Сб. науч. тр. / Под ред. О.В. Кузьмина. Иркутск: Издательство ИГУ. 2018. Вып. 21. С. 54–58.
2. Казаков Н.А., Кузнецова Т.И. Применение интерактивных геометрических сред в кружковой работе при решении геометрических софизмов // Десятая (юбилейная) ежегодная межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей, аспирантов и студентов «Платоновские чтения». Иркутск, ИМЭИ ИГУ, 29 января –12 февраля 2018 г.
3. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителей. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1959.
4. Лямин А. А. Математические парадоксы и интересные задачи : сборник задач для любителей математики. М.: типография Г. Лисснера и Д. Собко, 1911.
5. Презентация на тему «Математические софизмы». URL: https://infourok.ru/prezentaciya-po-matematike-na-temu-matematicheskie-sofizmi-1939087.html (дата обращения 22.08.2019)
6. Хохлов К. Исследовательская работа по теме «Софизмы и парадоксы» / Под рук. Е.А. Казьменко. Воронеж. МБОУ «Лицей №1». 2017. URL: https://znanio.ru/media/issledovatelskaya_rabota_po_teme_sofizmy_i_paradoksy-100458/119552 (дата обращения 22.08.2019)
7. Кузнецова Т.И. Опровержение — необходимый компонент обсуждения работы учащегося, дискуссии (в условиях математического образования) // Байкальский психологический и педагогический журнал. 2004. № 1–2 (3–4). С. 135–140.
8. Кузнецова Т.И. Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

ALGEBRAIC SOPHISMS AS A MEANS OF EDUCATION IN STUDENTS OF MATHEMATICAL CULTURE

T.I. Kuznetsova — Lomonosov Moscow State University
д.п.н., доцент
kuzti45@gmail.com
N.A. Kazakov — Moscow Region State University
alphan95@mail.ru,
Moscow

Abstract. One of the vivid topics for working with students is the topic "Mathematical sophisms." Mathematical sophisms can be considered by students of various classes, depending on the studied lesson or extracurricular material. In a wide class of problems, mathematical sophisms are distinguished: arithmetic, algebraic, and geometric sophisms. In studies [1, 2] describes the work of familiarizing students with geometric sophisms. This study shows situations in which students are faced with the need to search for errors in the algebraic transformation used in solving an algebraic problem. Usually, an unequal algebraic transition is revealed.

Keywords: teaching mathematics, algebraic sophisms, error search method.

References

1. Kazakov, N.A., Kuznetsova, T.I. (2018). From the history of the terms “model” and “modeling”. Part 3. Drawings - problem models [*Iz istorii terminov "model'" i "modelirovanie". CHast' 3. CHertezhi — modeli zadach*]. Problems of the educational process in innovative schools: Sat. scientific tr / Ed. O.V. Kuzmina. Irkutsk: Publishing house of ISU. V. 21. Pp. 54–58.
2. Kazakov, N.A., Kuznetsova, T.I. (2018). The use of interactive geometric media in circle work in solving geometric sophisms [*Primenenie interaktivnyh geometricheskih sred v kruzhkovoj rabote pri reshenii geometricheskih sofizmov*]. The tenth (anniversary) annual interregional scientific-practical conference of teachers, graduate students and students "Platonic Readings". Irkutsk, IMEI ISU, January 29 – February 12, 2018.
3. Poia, D. (1959). How to solve the problem: a manual for teachers [*Kak reshat' zadachu: posobie dlya uchitelej*]. Moscow: State Educational and Pedagogical Publishing House of the Ministry of Education of the RSFSR.
4. Lyamin, A. A. Mathematical paradoxes and interesting problems: a collection of problems for mathematics lovers [*Matematicheskie paradoksy i interesnye zadachi : sbornik zadach dlya lyubitelej matematiki*]. Moscow: Printing House of G. Lissner and D. Sobko, 1911.
5. Presentation on the topic "Mathematical sophisms." [*Prezentaciya na temu «Matematicheskie sofizmy»*]. URL: https://infourok.ru/prezentaciya-po-matematike-na-temu-matematicheskie-sofizmi-1939087.html (accessed 08.22.2019)
6. Khokhlov, K. (2017). Research on the subject of “Sophisms and paradoxes” [*Issledovatel'skaya rabota po teme «Sofizmy i paradoksy»*]. Hand. E.A. Kazmenko. Voronezh. MBOU "Lyceum №1". URL: https://znanio.ru/media/ issledovatelskaya_rabota_po_teme_sofizmy_i_paradoksy-100458/119552
7. Kuznetsova, T.I. (2004). Refutation is a necessary component of the discussion of student work, discussion (in the context of mathematical education) [*Oproverzhenie — neobhodimyj komponent obsuzhdeniya raboty uchashchegosya, diskussii (v usloviyah matematicheskogo obrazovaniya)*]. Baikal Psychological and Pedagogical Journal. V. 1–2 (3-4). Pp. 135-140.
8. Kuznetsova, T.I. (2011). A model of a graduate of the preparatory faculty in the space of pre-university mathematical education: Scientific publication [*Model' vypusknika podgotovitel'nogo fakul'teta v prostranstve predvuzovskogo matematicheskogo obrazovaniya*]. Moscow: Book house "LIBROCOM".

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.956.227

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Дмитрий Васильевич Корниенко
к.физ.-мат.н., доцент
dmkornienko@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена актуальным проблемам теории систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, а именно исследованию спектра и базисных свойств систем собственных вектор-функций оператора, сопоставимого граничной задаче. В статье рассматривается задача Коши для двух классов систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Изучение свойств разрешимости данных задач свелось к исследованию спектральных характеристик сопоставляемого ей оператора, благодаря введению обобщенного решения. Проводимые исследования базировались на методах, которые принято называть функциональными, а свойства разрешимости описываются в терминах спектральной теории линейных операторов. Подобные методы развивали и широко использовали в своих научных исследованиях К. Фридрихс, Л. Хёрмандер, С.Л. Соболев, А.А. Дезин, В. А. Ильин, В.К. Романко, Е.И. Моисеев, А.П. Солдатов. Хорошо известно, что наиболее часто в теории граничных задач для дифференциальных уравнений исследуются вопросы, связанные с разрешимостью граничных задач и дифференциальными свойствами решений таких задач. Изучение спектральных задач для дифференциальных уравнений является более трудным. Теория спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных эллиптического типа разработана довольно полно. Для дифференциальных уравнений других типов и для уравнений, не принадлежащих к классическим типам, теория спектральных задач находится в зачаточном состоянии. С этой точки зрения данная статья является весьма актуальной.

Ключевые слова: граничные задачи, спектр оператора, спектральные свойства, системы дифференциальных уравнений в частных производных, базис Рисса, условия Коши, базис.

В статье исследованы спектральные характеристики задачи Коши для определенного класса систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных [5], рассматриваемых в ограниченной области конечномерного евклидова пространства H.

Необходимость исследования свойств разрешимости систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных возникает всякий раз при изучении соответствующих природных явлений и процессов. Важные приложения теории систем уравнений в частных производных и проблемы, связанные с исследованием свойств разрешимости формулируемых граничных задач стимулировали исследование соответствующих спектральных задач. Спектральная теория операторов, порождённых граничными задачами, как для уравнений, так и для систем уравнений в частных производных, начала развиваться сравнительно недавно в ряде работ российских и зарубежных математиков. Изучались при этом как асимптотическое поведение собственных значений и расположение спектра на комплексной плоскости, так и «базисные» свойства систем, составленных из собственных вектор-функций. Исследование структуры спектра и возможности разложения решений по наборам собственных вектор-функций является в настоящее время одним из основных направлений при изучении вопросов спектральной теории граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Не смотря на значительный интерес к указанной проблематике, до сих пор не разработан метод, позволяющий ответить на возникающие вопросы даже для простейших систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных при числе переменных больше двух. Общие вопросы спектральной теории граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений так же изучены не достаточно полно.

В большей степени это относится к системам, не относящееся к классическим типам: эллиптическим, гиперболическим, параболическим.

Учитывая важность спектральных свойств граничных задач для неклассических систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, изучение спектральных характеристик последних весьма актуально. Теория граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, имея разнообразные применения, базируется на многочисленных методах (асимптотический, вариационный, проекционный, метод интегральных уравнений численные методы и другие исследования). В связи с этим отметим, что проводимые нами исследования базировались на методах, которые принято называть функциональными, а свойства разрешимости описываются в терминах спектральной теории замкнутых линейных операторов. Функциональные методы широко использовали в своих научных исследованиях К. Фридрихс, Л. Хёрмандер, С.Л. Соболев, А.А. Дезин, В. А. Ильин [1], В.К. Романко, Е.И. Моисеев [4], А.П. Солдатов [6], А.С. Макин [2].

Исследуемую граничную задачу запишем в виде

$$aD_t u(t) + bBu(t) = \lambda u(t) + f\left(t\right) \tag{1.1}$$

$$\mathrm{u}^1_{|\mathrm{t}=q} = \mathrm{u}^2_{|\mathrm{t}=q} = 0 \tag{1.2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ - спектральный параметр, $f(t) \in H;\, a, b$ - заданные матрицы (2×2); D_t - операция дифференцирования по переменной $t;\, u(t) = u^1(t)e_1 + u^2(t)e_2;\, (e_1, e_2)$ – ортонормированный базис; $q = 0, T$. Условия (1.2) являются условиями Коши. Поэтому рассматриваемую задачу будем называть задачей Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида (1.1).

Дифференциальный оператор B действует в H_x и удовлетворяет определённым требованиям, формулируемым в терминах спектральной теории операторов. Примеры интересующих нас дифференциальных операторов B и, следовательно, линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных приведены ниже. Операция $L(Dt, B) = aD_t + bB$в этом случае определена, естественно, на достаточно гладких вектор-функциях $u: \mathbb{R} \to H_x^m, u = u(t), u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))^T \in H_x^m, u^j(t) \in H_x,\ \ j = 1, \dots, m$ принадлежащих для каждого $t \in V_t$ области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B. Элемент $u(t) \in H$ будем называть решением задачи (1.1)-(1.2), если найдётся последовательность таких гладких и удовлетворяющих условиям (1.2) вектор-функций $u_n(t) \in \mathfrak{D}(B)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = u(t), \lim\limits_{n\to\infty} L(D_t, B)u_n(t) = f(t)$. Другими словами, мы имеем дело с задачей (1.1)-(1.2), понятие решения которой, как легко заметить, использует стандартную процедуру замыкания (расширения) операции $L(Dt, B) = aD_t + bB$ при условиях (1.2). Оператор $L: H \to H$, определяемый как замыкание в H операции $L(D_t, B)$, первоначально заданной на гладких вектор-функциях, удовлетворяющих условиям (1.2), называют сильным расширением операции $L(D_t, B)$ при условиях (1.2). В этом случае решение $u=u(t)$ называют сильным решением задачи (1.1)-(1.2). Уравнение (1.1) зачастую называют операторным или дифференциально-операторным уравнением 1^го порядка по t. Уравнение (1.1) находит широкое применение при исследовании в цилиндре граничных задач для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Принципиальная схема перехода от граничной задачи для линейных систем дифференциальных уравнения в частных производных к соответствующему дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве H будет описана ниже. Здесь же отметим следующее. Интересующие нас вопросы спектральной теории граничных задач для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных будут изучены на основе свойств сопоставляемого задаче дифференциального оператора $L:H\to H$ [5]. Свойства оператора L описываются в терминах спектральной теории линейных операторов.

Метод исследования

Идея метода исследования заключается в следующем. Пусть $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ пара сепарабельных гильбертовых пространств, в каждом из которых задан ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{k=\infty}, \{\psi_k\}_{k=1}^{k=\infty}$. Образуем гильбертово пространство $\mathcal{H}$ следующим образом. В качестве базиса $\mathcal{H}$ возьмем множество упорядоченных пар $\varphi_k \otimes \psi_j$, определив для этих пар скалярное произведение по правилу

$$(\varphi_k \otimes \psi_j, \varphi_l \otimes \psi_i) = (\varphi_k, \varphi_i)\cdot(\psi_j, \psi_i) \tag{1*}$$

где справа – скалярные произведения в $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ соответственно. Таким образом, относительно нормы, порождаемой скалярным произведением (1), базис $\{\varphi_k \otimes \psi_j\}_{k,j}$ - ортонормированный. Произведение (1*) распространяется обычным образом на конечные линейные комбинации

$$\sum f_{k,j}\varphi_k \otimes \psi_j \tag{2*}$$

Пополнение по введенной норме множества конечных линейных комбинаций (2*) дает (полное) гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ - тензорное произведение исходных гильбертовых пространств.

В соответствии с приведенной конструкцией для любой пары элементов $f = \sum f_k\varphi_k \in \mathcal{H}', \; g = \sum g_k\psi_k \in \mathcal{H}''$ определено их тензорное произведение

$$f \otimes g = \sum_{i,k} f_i g_k \varphi_i \otimes \psi_k,$$

(поскольку $\sum_{i,k} |f_i|^2 |g_k|^2 < \infty$.).

Если теперь $A' : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$ - замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A'), \varphi_k \in \mathcal{D}(A')$, для любого k и оператор $A'' : \mathcal{H}'' \to \mathcal{H}''$ обладает аналогичными свойствами, то над плотным в $\mathcal{H}$ множеством элементов вида (2*) (над множеством конечных линейных комбинаций) определен оператор

$$A' \otimes A''\left(\sum_{i,k} f_{i,k} \otimes \psi_k\right) = \sum f_{i,k} A'\varphi_i \otimes A''\psi_k$$

Замыкание в $\mathcal{H}$ заданного таким образом оператора $A' \otimes A''$ (с плотной областью определения) определяет оператор $A' \otimes A'' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Если $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ и $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ - функциональные пространства, то $\mathcal{H}'$ может быть естественным образом вложено в $\mathcal{H}$ за счет отождествления с подмножеством $\mathcal{H}' \otimes 1$

(состоящим из элементов вида $f \otimes 1, f \in \mathcal{H}'$). Имея в виду сказанное, элементы $\mathcal{H}'$ рассматривают зачастую как элементы $\mathcal{H}$ без каких-либо оговорок (и без перехода в обозначениях от fк $f \otimes 1$). Аналогично обстоит дело с операторами $A': \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$: их отождествляют с операторами вида $A' \otimes 1$.

Приведенная конструкция возникает естественным образом всякий раз, когда $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ - наши стандартные гильбертовы пространства функций над некоторыми областями $V' \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}'}, V'' \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}''}$. Тогда $\mathcal{H}$ - соответствующее пространство над $V' \times V''$. При этом операции $L'(D) \otimes L''(D)$ и соответствующий оператор записываются в виде

$$\sum a_\alpha(x) b_\beta(y) D_x^\alpha D_y^\beta$$

т.е. без использования обозначения $\otimes$ для тензорного произведения.

Поскольку в гильбертовом пространстве переход от базиса Рисса к ортонормированному базису и обратно равносилен замене данного скалярного произведения на эквивалентное. Ясно, что приведенные рассмотрения распространяются естественным образом и на тот случай, когда $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ - базисы Рисса в $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$.

Переход от $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ к случаю произвольного числа сомножителей $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{H}^k$ осуществляется автоматически.

Удобным классом операторов, функции от которых допускают весьма простое определение, являются М-операторы. Действительно, если $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ - есть М-оператор, $\{\varphi_k\}$ - система собственных функций оператора А, образующая базис Рисса, и можно, следовательно, для любого элемента $u \in \mathcal{D}(A)$ записать

$$u = \sum u_k \varphi_k, \; Au = \sum u_k A\varphi_k = \sum \lambda_k u_k \varphi_k,$$

то в предположении, например, что F(z) аналитична в области $\Omega \subset \mathbf{C}$ такой, что $\lambda_k \in \Omega$ для всех k, достаточно положить

$$F(A)u = \sum F(\lambda_k) u_k \varphi_k \tag{3*}$$

При этом $u \in \mathcal{D}(F_A)$ всякий раз, когда ряд (3*) сходится. Область определения оператора F(A) заведомо плотна (в нее попадают все конечные линейные комбинации элементов базиса).

Трудности, с которыми приходится сталкиваться при попытке применения приведенной идеальной схемы к конкретным ситуациям, возникаемым при анализе граничных задач, бывают связаны обычно, с одной стороны, со сложной природой соответствующих функций F(z), а с другой – со стремлением включить в рассмотрения операторы, не являющиеся М-операторами.

Приведенная схема немедленно распространяется на случай, когда $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{H}^k$ и $A^k: \mathcal{H}^k \to \mathcal{H}^k$ и $F(z_1, ..., z_n)$ - функция n комплексных переменных, удовлетворяющая соответствующим требованиям. Операторы A^k предполагаются при этом, разумеется, коммутирующими.

Пространство разрешимости граничной задачи и его представления

Пусть H_x - сепарабельное гильбертово пространство и $\{\varphi^s\}$, s∈S, − его базис Рисса. Здесь и в дальнейшем S − некоторое счётное множество индексов S, которыми нумеруются элементы φ^s базиса пространства H_x. Не ограничивая общности результатов и учитывая ограничения, накладываемые на изучаемую граничную задачу, можно считать, что H_x = =$\mathcal{L}_2(V_x)$ - гильбертово пространство комплексных функций над замкнутой ограниченной областью V_x евклидова пространства R^m с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля. Пусть также система $\{\psi^s\}$, s∈S , является базисом H_x, биортогональным базису $\{\varphi^s\}$, s∈S. В таком случае биортогональная система $\{\varphi^s,\ \psi^s\}$, s∈S, состоит из базисов Рисса пространства H_x.

Обозначим через $e_1,\ \dots\ ,e_m$ канонический ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}^m$ вектор-столбцов: $e_1 \overset{def}{=} (1,0,\dots,0)^T,\dots,\ e_m \overset{def}{=} (0,\dots,0,1)^{\mathcal{T}}$, где $\mathcal{T}$–операция транспонирования; а через U - унитарное пространство элементов $u = u^1e_1 + \ldots + u^m e_m$; $u^k \in \mathbb{C}$, $k = 1,\ldots,m$; со скалярным произведением $(u,v)_U = u^1\overline{v^1} + \ldots + u^m\overline{v^m}$. Пусть также H_x^m - гильбертово пространство элементов $u = u^1e_1 + \ldots + u^m e_m;\ u^k \in H_k$ с нормой $\|u\|_{H_x^m} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\|u^k\|_{H_x}^2}$ Очевидно, что любой элемент U является элементом $H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$.

При таком подходе U является собственным подпространством H_x.Отметим, что H_x^m можно представить в виде ортогональной суммы m копий гильбертова пространства H_x, то есть в виде:

$$H_x^m = \sum_{k=1}^{m} \oplus H_x \text{ или кратко в виде: } H_x^m = \bigoplus_{k=1}^{m} H_x$$

Пусть $t \in V_t = [T_1,T_2], -\infty < T_1 \le 0 \le T_2 < +\infty, T_2 - T_1 \ne 0.$ Положим $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$ гильбертово пространство комплексных функций над V_t с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля, $H_{tx} = H_t \otimes H_x$. В дальнейшем изучение свойств разрешимости граничной задачи для линейных систем уравнений в частных производных будем проводить в гильбертовом пространстве $H = H_t \otimes H_x^m$, $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$. Важную роль при исследовании свойств спектральной задачи для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных имеет нижеследующая лемма 1.1 и вытекающая из неё лемма 1.2.

Лемма 1.1. Справедливо следующее равенство: $H_{tx} = H_x \otimes U$.

В силу теории биортогональных систем для любого элемента $u \in H_x^m$ имеет место представление в виде ряда: $u = \sum_{s,k} u_s^k \varphi_k^s$ по биортогональной системе $\{\varphi_k^s,\psi_k^s\}, \varphi_k^s = \varphi^s e_k, \psi_k^s = \psi^s e_k.$ Так как $u_s^k = (u,\psi_k^s)H_x^m = (u^k,\psi^s)H_x$, то в силу безусловной базисности базиса $\{\varphi_k^s\}$ имеем также равносильное представление: $u = \sum_s \varphi^s u_s$ для элемента *u*, где $u_s = u_s^1 e_1 + \ldots + u_s^m e_m \in U.$

Теперь мы можем получить другие формы представления гильбертова пространства *H*.

Лемма1.2.Справедливы следующие равенства:

$$H = H_t^m \otimes H_x = H_t \otimes H_x^m = \bigoplus_{k=1}^{m} H_{tx}.$$

Достаточно заметить, что для вектор - функции $u(t)\in H$ в силу леммы 1.1 справедливы два представления $u(t)=\sum_{s,k}u_s^k(t)\varphi_k^s=\sum_s\varphi^s u_s(t)$ и воспользоваться разложением вектор-функций $u_s(t)$ (функций $u_s^k(t)$) в ряд по полной ортонормированной системе в H_t^m (в H_t).

Отметим, что норма элемента *u* гильбертова пространства *H* вектор-функций $u{:}\overline{V}\to H_x^m, u=u(t)=u^1(t)e_1+\ldots+u^m(t)e_m$ может быть вычислена по формуле: $\|u\|_H=\left\|\|u(t)\|_{H_x^m}\right\|_{H_t}$.

Дифференциальный оператор *B* и его расширение

Пусть $B{:}H_x\to H_x$ - линейный замкнутый неограниченный оператор с плотной в H_x областью определения $\mathfrak{D}(B)$, не зависящей от $t\in V_t$ и $B\varphi^s=B\{s\}\varphi^s$ для любого $s\in S$, то есть все элементы базиса Рисса $\{\varphi^s\}$, $s\in S$, пространства H_x являются собственным элементами оператора B: собственному значению $B(s)$ соответствует собственный элемент φ^s. Оператор, для которого существует полная система собственных элементов, образующая базис Рисса в H_x, принято называть М - оператором (от слова - модельный). Следует отметить, что существует *M* – оператор *B*, точечный спектр которого не имеет конечных предельных точек. В этом случае его резольвентное множество не пусто. Кроме того, существует *M* - оператор В, резольвентное множество которого пусто. Приведём примеры интересующих нас *M* - операторов.

$B=B(x,D_x)$.где В (x, D_x) является обыкновенным дифференциальным оператором на отрезке $V_x=[a,b], -\infty<a<b<+\infty$, порождаемым сильно регулярными краевыми условиями. Предполагается, что оператор $B(x, D_x)$ не имеет присоединённых функций.

Пусть $V_x=V_{xl}\times V_{x2}\times\ldots\times V_{xm}$, $V_{xk}=[0,a_k]$, $0<a_k<+\infty$, $\kappa=1,\ldots,m$. Пусть также $B(D_X)=\sum_{|a|\le r}b_aD_x^a$ -дифференциальная операция с постоянными комплексными коэффициентами $b_a=b_{a1,a2\ldots am}$; $D_x^a=D_{x_1}^{a_1}D_{x_2}^{a_2}\ldots D_{x_m}^{a_m}$; $|a|=a_1+a_2+\ldots+a_m$. Обозначим через $B{:}\ \mathcal{L}_2(V_x)\to\mathcal{L}_2(V_x)$ замыкание в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих по каждой переменной x_κ нелокальным краевым условиям вида

$$\mu_kD_{x_k}^{l_k}u\Big|_{x_k=0}=D_{x_k}^{l_k}u\Big|_{x_k=b_k},\ l_k=0,1,\ldots,r_k-1, \tag{1.3}$$

где $\mu_k\ne0$ и r_k – порядок $B(D_x)$ по переменной x_κ; $\kappa=1,2,\ldots,m$. Известно, что замкнутый дифференциальный оператор B является *M* - оператором. Если $\mu_1=\ldots=\mu_k=1$, то оператор *B* принято называть *П*- оператором.

Пусть V_x -замыкание ограниченной гладкой гиперповерхностью $S=\partial V_x$ области V_x евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть также $B(D_X)=\sum_{|a|\le2r}b_a(x)D_x^a$ - формально самосопряжённая эллиптическая дифференциальная операция, причём $(-1)^r\sum_{|a|\le2r}b_a(x)\xi^a>0$ для всех $x\in V_x$ и всех $\xi\in\mathbb{R}^m, \xi\ne0$. Обозначим через $B{:}\ \mathcal{L}_2(V_x)\to\mathcal{L}_2(V_x)$ замыкание в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$ первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих условиям Дирихле

$$D_\nu^{k-1}u_{|x\in S}=0,\ k=1,\ldots,r,$$

где ν- единичная внешняя нормаль к поверхности S. Известно, что замкнутый дифференциальный оператор B обладает свойствами М - оператора, причём B является правильным оператором, то есть $0 \in \varrho B$. В дальнейшем этот М - оператор В будем называть М - эллиптическим дифференциальным оператором.

Примечание 1.1. Следует отметить, что выбор М - оператора В определит при заданных матрицах а и bво-первых вид системы (1.1) дифференциальных уравнений в частных производных и, во - вторых, тип краевых условий по переменной x. Поэтому, говоря о краевой задаче для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, записанной в форме дифференциально-операторного уравнения (1.1), будем указывать только условия по переменной t: выбор условий по tопределяет название задачи. Например, говоря о задаче Дирихле для системы (1.1), мы имеем в виду, что краевые условия (1.2) являются условиями Дирихле; условия по x вошли в определение оператора В и явно не оговариваются. Кроме того, ради простоты обозначений переменная x (а иногда и переменная t) как аргумент вектор-функции и $\in$ H явно не указывается.

Положим $B(S) = \{B(s) : s\in S\}$.Будем считать выполненным следующее условие 1.1. на структуру спектра M - оператора B.

Условие 1.1.Точечный спектр оператора $B:H_x \to H_x$ представим, в виде: $P\sigma B = B(S)$.

Известно, что спектр σB оператора $B: H_x^m \to H_x^m$ состоит из замыкания на комплексной плоскости точечного спектра $P\sigma B$ оператора B. Множество $C\sigma B = \sigma B \setminus P\sigma B$ образует непрерывный спектр оператора B.

Заметим, что уравнение (1.1) мы рассматриваем в гильбертовом пространстве H вектор-функций $u(t) = u^1(t)e_1 + \ldots + u^m(t)e_m$, а оператор B определён на скалярах $u^k(t) \in H_x$ для любого $t\in V_t$ и любого $k = 1, 2,\ldots, m$. Следующие соглашения являются оправданием такой записи. Так как H_x^m можно представить в виде ортогональной суммы m копий гильбертова пространства H_x, то естественно определить расширение оператора B на H. Расширение оператора $B: H_x^m \to H_x^m$ на гильбертово пространство векторов H_x^m, как и принято, будем обозначать тем же символом B. Будем говорить, что $u = u^1e_1 + \ldots + u^me_m \in \mathfrak{D}(B)$ - области определения оператора $B: H_x^m \to H_x^m$ и $Bu = (Bu^1)e_1 + \ldots + (Bu^m)e_m$, если $u^\kappa \in \mathfrak{D}(B)$ - области определения оператора $B : H_x \to H_x$ для любого $\kappa = 1, \ldots, m$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1.Спектр σB оператора $B: H_x^m \to H_x^m$ совпадает с замыканием его точечного спектра $P\sigma B$. Точечный спектр $P\sigma B$ оператора B даётся формулой $P\sigma B=B(S)$. Собственному значению $B(s)$ оператора B соответствуют т собственных векторов $\varphi_k^s = \varphi^s e_k; k = 1,\ldots,m$. Система $\{\varphi_k^s: k = 1, \ldots, m;\ s\in S\}$ собственных векторов оператора B является базисом Рисса в гильбертовом пространстве H_x^m.

Следует отметить, что в некоторых случаях начало доказательства будем обозначать символом □, а конец доказательства символом ■.

□ Если $\{\varphi^s, \psi^s : s \in S\}$ - биортогональная система в H_x, то система

$\{\varphi_k^s, \psi_k^s : k = 1,\ldots,m;\ s \in S\}$ биортогональна в H_x^m. Для любого $u = \sum_{k=1}^m u^k e_k \in H_x^m$ имеем $u^k = \sum_s (u^k, \psi^s)_{H_x} \varphi^s$ в H_x и, следовательно, и $u = \sum_{k,s} (u, \psi_k^s)_{H_x^m} \varphi_k^s$ причём разложение единственно. Существуюттакие константы $0 < C_1 \le C_2 < +\infty$, что для любого элемента $u^\kappa \in H_x$ имеем

$$C_1^2\sum_s\left|\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x}\right|^2 \le \left\|u^k\right\|_{H_x}^2 \le C_2^2\sum_s\left|\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x}\right|^2 \tag{1.4}$$

Складывая неравенства (1.4) для значений k = 1, ..., m и учитывая, что $\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x}=\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x^m}$, получаем неравенство

$$C_1^2\sum_{k,s}\left|\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x^m}\right|^2 \le \left\|u^k\right\|_{H_x^m}^2 \le C_2^2\sum_{k,s}\left|\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x^m}\right|^2,$$

из которого следует, что B является М - оператором в H_x^m.

Обобщённое решение

Пусть $\mathfrak{D}_t$ -линейное многообразие гладких вектор-функций из H_t^m, удовлетворяющих условию (1.2), а точнее,

$$v\in\mathfrak{D}_t,\text{ если }\begin{cases} v\in C^2(V_t^{\pm})\cap C\left(V_t\right)\\ L_s(D_t)v\in H_t^m\\ \Gamma_t v=0\end{cases} \tag{1.5}$$

где $L_s(D_t)=aD_t+bB(s),\Gamma_t v=\mu_1 v(T_t)+\mu_2 v(T_2),V_t^{\pm}=V_t\setminus\{T_1,0,T_2\}.$

Пусть также $\mathfrak{D}$ -линейное многообразие, состоящее из вектор-функций $u:\mathbb{R}\to H_x^m$, $u=u(t)$, вида

$$u(t)=\sum_s v_s(t)\varphi^s, \tag{1.6}$$

где $v_s(t)$ из $\mathfrak{D}_t$ и суммирование проводится для конечного набора индексов $s\in S$.

Для любых $u,\ f\in H$ будем говорить, что $u\in\mathfrak{D}$ (L) - области определения оператора

$L:H\to H$ и Lu = f, если найдётся такая последовательность $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ вектор-функции $u_n\in\mathfrak{D}$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|u_n-u\right\|_H=\lim\limits_{n\to\infty}\left\|L(D_t,B)u_n-f\right\|_H=0$. Оператор $L:H\to H$ называют замыканием операции $L(D_t, B) = aD_t + bB(D_x)$ - левой части системы уравнений (1.1) на вектор - функциях из $\mathfrak{D}$.

Определение 1.1.Элемент $u\in\mathfrak{D}$ (L) будем называть обобщённым решением задачи (1.1)-(1.2), если $Lu=\lambda u+f$ в H.

Таким образом, изучение свойств разрешимости задачи (1.1)-(1.2) свелось к исследованию спектральных характеристик сопоставляемого ей оператора $L:H\to H$. Приведём некоторые подходы описания его спектра и свойств системы собственных вектор-функций [24]. Пусть L_S: $H_x^m\to H_x^m$ - замыкание операции $L_S(D_t) = aD_t + bB(s)$ на функциях из $\mathfrak{D}_t$. Удобно считать, что и в этом случае B является оператором: $Bu=B(s)u$, $B:H_x^m\to H_x^m$, то есть оператором умножения на константу $B(s)$. Отметим следующие очевидные свойства:

Для конечных линейных комбинаций $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi^{sk}u_{sk}(t)\in\mathfrak{D}$ и $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi^{sk}u_{sk}(t)\in H$

имеем: вектор-функция $u_n\in H$ является решением уравнения $Lu=\lambda u+f$ тогда и только тогда, когда для любого κ = 1,2, ..., n вектор-функция $u_{sk}\in H_x^m$ является решением уравнения $L_{sk}v=\lambda u+f_{sk}$.

Точечный спектр $P\sigma L$ оператора $L : H \to H$ даётся формулой: $P\sigma L = \bigcup_{s\in S} P\sigma L_s$ если $u(t)$ − собственная вектор-функция оператора L_s: $H_x^m \to H_x^m$, соответствующая собственному значению λ, то $\varphi^s u(t)$ собственная вектор-функция оператора *L*, соответствующая собственному значению λ.

Структура собственных вектор-функций оператора *L* позволяет, как это проделано для скалярных функций, доказать ряд аналогичных теорем о свойствах систем собственных вектор - функций оператора *L.* Докажем интересующие нас свойства.

Теорема 1.2. Если для любого s∈S система (последовательность) $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ собственных вектор-функций оператора L_s, где K_s - некоторое (упорядоченное) множество значений индекса k, полна (образует базис) в пространстве H_x^m, то система

$$\{\varphi^2 v_{k,s} : k \in K_s; s \in S\} \tag{1.7}$$

собственных вектор-функций оператора L полна (образует базис) в пространстве *H.*

Докажем вначале полноту в *H* системы $\{u_{k,s} : k \in K_s; s \in S\}$ собственных вектор - функций $u_{k,s} = \varphi^s u_{k,s}$ оператора *L.* Пусть *f*- произвольный элемент *H.* Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой конечный набор $\{\varphi^{si} : i = 1, 2, ..., N\}$, что

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \varphi^{si} f_{si} \right\|_H < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $f_{s_i} \in H_x^m$. Пусть $C = \max_{1\le i\le N} \left\|\varphi^{s_i}\right\|_{H_x}$ Подберём для каждого $i = 1,\ 2, ..., N$ такой конечный набор $\{v_{k_n,s_i} : n = 1, 2, \ldots, N_i\}$, чтобы

$$\left\| f_{si} - \sum_{i=1}^{N_i} f_{k_n,s_i}, v_{k_n,s_i} \right\|_{H_t^m} < \frac{\varepsilon}{2CN},$$

где $f_{k_n,s_i} \in \mathbb{C}$. Неравенство $\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N_i} f_{k_n,s_i} \varphi_{s_i} v_{k_n,s_i} \right\|_H \le$

$$\le \left\| f - \sum_{i=1}^{N} f_{s_i} \varphi_{s_i} \right\|_H + C \sum_{i=1}^{N} \left\| f_{s_i} - \sum_{n=1}^{N_i} f_{k_n,s_i} v_{k_n,s_i} \right\|_{H_t^m} < \varepsilon$$

даёт утверждаемую полноту.

Исследуем теперь вопрос о базисности системы (1.7) в *H.* Из равенства $H = H_t^m \otimes H_x$ следует, что для любого элемента *f*∈*H* справедливо в *H* представление $f = \sum_{s\in S} \varphi^s f_s$, в котором коэффициенты $f_s \in H_x^m$ определены однозначно. Так как последовательность $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ образует базис в пространстве H_t^m, то для каждого элемента $f_s \in H_x^m$ справедливо в H_t^m представление $f_s = \sum_{k\in K_s} f_{k,s} v_{k,s}$, где коэффициенты $f_{k,s} \in \mathbb{C}$ также определены однозначно. Следовательно, получаем единственное представление $f_s = \sum_{s\in S}\sum_{k\in K_s} f_{k,s}\varphi^s u_{k,s}$ произвольного элемента $f \in H$ в виде ряда по системе собственных вектор-функций оператора *L*.

Аналогично можно исследовать и другие свойства. А именно, является ли система собственных вектор-функций минимальной, бесселевой, гильбертовой, базисом Рисса и так далее. Соответствующие исследования проводились многими авторами [1-6]. Например, при исследовании граничных задач для уравнений смешанного типа Е. И. Моисеев широко использовал базисность систем синусов и косинусов для построения решения в виде биортогональных рядов по этим системам. В дальнейшем мы будем изучать граничные задачи в пространстве $H = H_t^m \otimes H_x$ при m = 2. Поэтому естественно возникает вопрос о базисности аналогичных систем в пространствах вектор-функций. Приведём пример ортонормированного базиса $\{e_k$: $k\in K\}$ в H_t^2, составленного из синусов и косинусов; тем самым построим базис Рисса $\{e_\kappa\varphi^s : \kappa\in K, s\in S\}$ в пространстве *H*.

Положим

$$e_k^1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_2-T_1}} sin\{A(k)(t-T_1)\}, e_k^2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_2-T_1}} cos\{A(k)(t-T_1)\},$$

$$e_k(t) = e_k^1(t)e_1 + e_k^2(t)e_2,\ ,где\ A(k) = k\frac{\pi}{T_2-T_1}$$

Лемма 1.3 Система $\{e_\kappa(t)\varphi^s; k=0, \kappa\in\mathbb{N}, s\in S\}$ заведомо не является полной в гильбертовом пространстве $H = H_t^m \otimes H_x$. Система $\{e_\kappa(t)\varphi^s; \in\mathbb{Z}, s\in S\}$ является базисом Рисса в H.

Докажем первое утверждение леммы 1.3. В силу рассмотрений теоремы 1.2 достаточно доказать, что система вектор-функций

$$\{ e_\kappa(t) : k=0, \kappa\in\mathbb{N} \} \tag{1.8}$$

не является полной в H_t^2. Найдём представление вектор-функции $f \in H_t^2$, $f = f(t) = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2$, ортогональной всем вектор-функциям системы (1.8). Из условия ортогональности для любого κ = 1,2,3, ... имеем в H_t равенство:

$$f(t) - A(k)F^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^k e_m^2(t),\ \text{где}\ F^1(t) = \int_{T_1}^{t} f^1(\tau)d\tau,\ c_k^k = 0.$$

Откуда получаем представление для функции $F^1(t)$:

$$A(1)F^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(c_m^k - c_m^{k+1})e_m^2(t).$$

Так как $c_m^k - c_m^{k+1} = c_m^{k+1} - c_m^{k+2}$ при любом k= 0, 1, 2, ... , то $c_m^{m-1} - c_m^{m+1}$ для любого m = 1, 2, 3, ... Из равенства $c_m^k = (f^2 - A(1)F^1, e_m^2)_{H_t}$ последовательно получаем:

$$c_m^{m-1} = c_m^0 - A(m-1)(F^1, e_m^2)_{H_t};$$

$$c_m^{m+1} = c_m^0 - A(m+1)(F^1, e_m^2)_{H_t};$$

$$c_m^0 = A(m)(F^1, e_m^2)_{H_t}.$$

Откуда находим $(f^1, e_m^1)_{H_t} = -c_m^0$. Следовательно, имеем разложения

$$f^1(t) = -\sum_{m=1}^{\infty} c_m^0 e_m^1(t),\ f^2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^0 e_m^2(t).$$

Положив в этих разложениях, например, $c_m^0 = \dfrac{1}{2^m}$ получаем искомую вектор-функцию $f \in H_t^2$, то есть вектор-функцию ортогональную всем вектор-функциям системы (1.8).

Докажем теперь вторую часть леммы, рассуждая, как и прежде, от противного. Пусть вектор-функция $f(t) \in H_t^2$ отлична от нуля и ортогональна в H_t^2 всем вектор-функциям системы $\{e_\kappa(t) : k \in \mathbb{Z}\}$. В силу доказанного ранее при $\kappa = -1, -2, -3, \dots$, имеем: $0 = (f, e_k)_{H_t^2} = 2c_{|k|}^0$, то есть $f = 0$. Замечая, что система

$$\left\{ e_\kappa(t) / \sqrt{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1.9}$$

является ортонормированной системой в H_t^2 и, учитывая её полноту в H_t^2, получаем: система (1.9) - ортонормированный базис в H_t^2, а система $\{e_\kappa(t)\varphi^2 : k \in \mathbb{Z}; s \in S\}$ - базис Рисса в $H = H_t^m \otimes H_x$

Выделенные свойства оператора L приводят к необходимости исследования свойств операторов L_S. Займёмся этим. В соответствии со схемой рассмотрим в H_t^m цепочку спектральных задач:

$$L_s u(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad s \in S. \tag{1.10}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\lambda \notin P\sigma L_s$, то структура резольвенты $R_\lambda = R_\lambda(L_s)$ оператора L_S легко просматривается из представления $u(t) = R_\lambda f(t)$,

$$R_\lambda f(t) = \int_{T_1}^{T_2} G_s(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau, \tag{1.11}$$

решения операторного уравнения (1.10). Матрицу Грина $G_s(t, \tau, \lambda)$ в данном случае удобно выписать в виде

$$G_s(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} \Phi_s(t,\lambda) M_s^{-1}(\lambda) \mu_1 \Phi_s(T_1,\lambda) \cdot \\ \cdot \Phi_s^{-1}(\tau,\lambda) a^{-1}(\tau),\ T_1 \le \tau \le t \le T_2 \\ \Phi_s(t,\lambda) M_s^{-1}(\lambda) \mu_2 \Phi_s(T_2,\lambda) \cdot \\ \cdot \Phi_s^{-1}(\tau,\lambda) a^{-1}(\tau),\ T_1 \le t \le \tau \le T_2, \end{cases} \tag{1.12}$$

где $M_s(\lambda) = \mu_1 \Phi_s(T_1, \lambda) + \mu_2 \Phi_s(T_2, \lambda)$, $\Phi_5(t, \lambda)$ - фундаментальная матрица оператора $L_s - \lambda E$, а E - тождественный оператор в H_t^m.

Представление (1.12) позволяет выписать функцию, нули которой являются собственными значениями оператора L_S и, следовательно, оператора L. Такой функцией, очевидно, является определитель $\Delta_2(\lambda)$ матрицы $\mu_1\Phi_s(T_1,\lambda)+\mu_2\Phi_s(T_2,\lambda)$. Положим $W_t = V_t \times V_t$.

Теорема 1.3. *Пусть* $\lambda \notin P\sigma L$. *Тогда:*

1. $\lambda \in \varrho L$, если существуют такие а) число C> *0* и б) скалярные функции $g_s - g_s(t,\tau,\lambda)$ что для всех $s \in S$и всех $(t,\tau)\in W_t$ матрица Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ оператора L_s- λE удовлетворяет неравенству

$$\|G_s(t,\tau,\lambda)u(\tau)\|_U \le \|g_s(t,\tau,\lambda)u(\tau)\|_U$$

и нормы $\|g_s\|_{\mathcal{L}^2(\overline{W}_t)}$, равномерно по s ограничены, то есть для любого $s \in S$ имеет место неравенство $\sqrt{m}\|g_s\|_{\mathcal{L}^2(\overline{W}_t)} < C$.

2. $\lambda \in C\varrho L$, если существуют такие вектор-функции $f(t)\in H_t^m$,$s \in S' \subseteq S$, что $f_s \neq 0$ и

$$\sup_{s\in S'} = \frac{\|R_{\lambda,s} f_s\|_{H_t^m}}{\| f_s\|_{H_t^m}} = +\infty. \tag{1.13}$$

□ 1. Для любой вектор-функции $f(t)\in H$ в силу теоремы 1.2 имеем представление $f_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi^{sk} f_{sk}(t),\ f_s(t)\in H_t^m.$ Аппроксимируем $f(t)\in H$ частичной суммой $f_n(t)\in H$ её разложения в ряд по биортогональной системе $\{\varphi_m^s,\psi_m^s\}$:

$$f_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi^{sk} f_{sk}(t),\ f_{sk}(t)\in H_t^m,$$

и определим входящую в определение обобщённого решения изучаемой задачи последовательность $\{u_n(t)\}$в виде: $u_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi^{sk}u_{sk}(t), u_{sk}(t)=R_{\lambda,sk}(t)..$ Из свойств нормы, матрицы Грина и неравенства Коши - Буняковского и условий теоремы получаем необходимую нам оценку: $\|u_{sk}\|_{H_t^m} \le C\| f_{sk}\|_{H_t^m}$. Действительно,

$$\|u_{s_k}(t)\|_U^2 = \sum_{n=1}^{m}\left|\int_{V_t}\sum_{i=1}^{m} G_{s_k}^{n,i}(t,\tau,\lambda)\, f_{s_k}^{i}(\tau)d\tau\right|^2 \le$$

$$\le\left(\int_{V_t}\sum_{n=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{m} G_{s_k}^{n,i}(t,\tau,\lambda)\, f_{s_k}^{i}(\tau)\right|d\tau\right)^2 \le m\int_{V_t}\left\|G_{s_k}(t,\tau,\lambda)\, f_{s_k}(\tau)\right\|_U d\tau \le$$

$$\le m\int_{V_t}|g(t,\tau,\lambda)|^2 d\tau\int_{V_t}\| f_{s_k}(\tau)\|_U^2 d\tau =$$

$$= m\int_{V_t}|g(t,\tau,\lambda)|^2 d\tau \left\|\| f_{s_k}(t)\|_U\right\|_{H_t}^2 .$$

Осталось воспользоваться равенством $\|u_{s_k}\|_{H_t^m} = \left\|\|u_{s_k}(t)\|_U\right\|_{H_t}$.

Далее в силу теоремы 1.1. имеем двойное неравенство

$$C_1^2\sum_{k=1}^{n}\left\|u_{s_k}\right\|_{H_t^m}^2 \le \left\|u_n\right\|_H^2 \le C_2^2\sum_{k=1}^{n}\left\|u_{s_k}\right\|_{H_t^m}^2 .$$

Учитывая доказанное, получаем неравенство

$$\left\|u_n\right\|_H \le c\left\|f_n\right\|_H, c = C\frac{C_2}{C_1}, \tag{1.14}$$

из которого следует единственность решения уравнения $Lu_n = \lambda u_n + f_n$, фундаментальность последовательности $\{u_n\}$ в H и существование решения уравнения $Lu_n = \lambda u_n + f$.Если положить $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, то переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (1.14) получаем

$$\left\|u_n\right\|_H = \left\|\left(L-\lambda\right)^{-1} f\right\|_H \le c\left\|f\right\|_{H'}$$

то есть $\lambda \in \varrho L$.

2. Будем пользоваться обозначениями и результатами первой части теоремы 1.3. В частности было доказано, что оператор $(L-\lambda)^{-1}$ существует и задан на множестве, всюду плотном в H. Далее имеем:

$$\frac{\left\|(L - \lambda)^{-1}\varphi^s f_s\right\|_H}{\left\|\varphi^s f_s\right\|_H} \ge \frac{C_1}{C_2}\frac{\left\|(L_s - \lambda)^{-1} f_s\right\|_{H_t^m}}{\left\| f_s\right\|_{H_t^m}}.$$

Откуда в силу условия (1.13) теоремы 1.3. получаем $\left\|(L - \lambda)^{-1}\right\| = +\infty$, то есть $\lambda \in C\varrho L$. ■

Обозначим через L_s сужение оператора L на подпространство $H_t^m \otimes \varphi_s$ пространства H. Тогда $L_s = L_s \otimes 1$. Учитывая важность оператора L_s, в дальнейшем будем называть его проекцией оператора L на пространство H_t^m относительно φ^s, или просто s – проекцией оператора L.

Задача Коши для квазигиперболических систем первого и второго типа

Пусть $t \in V_t \equiv [T, 0]$, то есть $T_1 = T < 0$, $T_2 = 0$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H_x = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H = H_t \otimes H_x^2$. В гильбертовом пространстве $H = L_2(V)$ вектор-функций $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$ переменных t, x рассмотрим системы уравнений, записанных в форме дифференциально-операторных уравнений

$$aD_t u + bBu = f, \text{ при } a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.1}$$

$$aD_t u + bBu = f, \text{ при } a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.2}$$

К операторным уравнениям (2.1) и (2.2) присоединим граничные условия Коши по t вида:

$$u^1_{|t=T} = u^2_{|t=T} = 0 \tag{2.3}$$

Определение 2.1.Элемент $u \in \mathfrak{D}$ (L)будем называть обобщённым решением задачи (2.1)-(2.3) (либо (2.2)-(2.3)), если $Lu = \lambda u + f$ в H.

Обозначим через $L: H \to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый изучаемой задаче (2.1)-(2.3) (либо задаче (2.2)-(2.3)) в силу определения 2.1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Опишем спектральные свойства задачи (2.1)-(2.3) (задачи (2.2)-(2.3)):

1. Если оператор B обладает сильным B - свойством, то резольвентное множество оператора L заполняет комплексную плоскость.

2. Если оператор B не обладает сильным B - свойством, то непрерывный спектр оператора L заполняет комплексную плоскость.

□ Пусть λ - произвольное комплексное число. Рассмотрим дифференциальный оператор $L: H \to H$, сопоставляемый задаче (2.2)-(2.3) в силу определения 2.1. Обозначим s - проекцию оператора L через L_s. Выпишем матрицу Грина оператора $L_s - \lambda$:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} A(t,\tau,\lambda), \text{если } T \le \tau \le t \le 0; \\ 0, \text{если } T \le t \le \tau \le 0. \end{cases}$$

Здесь $A(t,\tau,\lambda) =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right) - \dfrac{\lambda\sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} & -\dfrac{B\sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} \\ -\dfrac{B\sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} & \cos\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right) + \dfrac{\lambda\sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} \end{pmatrix},$$

0 – нулевая матрица; $b^2 = -B^2 - \lambda^2, B = B(s)$.

Для любого индекса $s \epsilon S$ и для любого числа $\lambda \in C$ знаменатель матрицы Грина оператора $L_s - \lambda$ отличен от нуля, то есть $\Delta_s(\lambda) \neq 0$. Поэтому точечный спектр оператора L есть пустое множество, то есть $P\varrho L \neq \varnothing$.

Оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$определён на конечных линейных комбинациях $\sum_{m,n,s} t^m \varphi_n^s$ элементов H. Системы $\{t^m : m = 0,1,2 \ldots\}$ и $\{\varphi_n^s : n = 1,2; s \in S\}$ полны в пространствах H_t и H_x^2 соответственно. Следовательно, система элементов $\{x^m \varphi_n^s : m = 0,1,2,\ldots; n = 1,2; s \in S\}$ полна в H. Доказательство этого проводится как в работе [5]. Таким образом, остаточный спектр оператора L - пустое множество: $R\varrho L = \varnothing$.

Если $\sup_s|\mathrm{Re}B(s)| < \infty$, то для элементов $G_s^{i,j}(t,\tau,\lambda)$ матрицы Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ имеем $\sup_s\left|G_s^{i,j}\right|_{\mathcal{L}_2(W_t)} < \infty$. Воспользовавшись работой [5], получаем включение $\lambda \in \varrho L$.

Пусть последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$такова, что $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}B(s_n) = \infty$.

Положим $u_n = u_n(t) = (L_{s_n} - \lambda)^{-1} e_2$. Тогда

$$u_n^1 = u_n^1(t) = -\frac{B(s_n)}{B^2(s_n) + \lambda^2}\left(\cos\sqrt{-b^2(s_n)}(t-T) - 1\right).$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\|u_n^1\|_{H_t} = \infty$, то $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{H_t{}^2} = \infty$. Далее имеем

$$\|(L - \lambda)^{-1}\| \ge \frac{\left\|(L - \lambda)^{-1}\varphi_2^{s_n}\right\|_H}{\left\|\varphi_2^{s_n}\right\|_H} \ge -\frac{C_1}{TC_2}\|u_n\|_{H_t{}^2}$$

В силу сделанного ранее допущения получаем включение $\lambda \in C\varrho L$. Осталось заметить, что λ - произвольное комплексное число.

Обозначим теперь через $L: H \to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый задаче (2.1)-(2.3) в силу определения 2.1. Доказательство выписанной структуры спектра этого оператора проводится также, как и в случае оператора, порождённого задачей (2.2)-(2.3). Оно базируется на представлении матрицы Грина оператора $L_s - \lambda$:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = e^{\lambda(t-\tau)}\begin{cases}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(B(t-\tau)) & -\mathrm{sh}(B(t-\tau)) \\ -\mathrm{sh}(B(t-\tau)) & \mathrm{ch}(B(t-\tau))\end{pmatrix}, \text{если } T \le \tau \le t; \\ 0, \text{если } t \le \tau \le 0.\end{cases}$$

Здесь $B = B(s)$, L_s является s-проекцией оператора L, порождённого задачей (1)-(3). ■

Задача Коши для квазиэллиптических системы первого и второго типа

Пусть $t \in V_t \equiv [0,T]$, то есть $T_1 = 0, T_2 = T > 0$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$; $H = H_t \otimes H_x^2$. В гильбертовом пространстве вектор-функций H рассмотрим системы уравнений, записанных в форме дифференциально-операторных уравнений

$$aD_t u + bBu = f, \text{при } a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.4}$$

$$aD_t u + bBu = f, \text{при } a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.5}$$

Начальные условия имеют теперь следующий вид:

$$u^1_{|t=0} = u^2_{|t=0} = 0 \tag{2.6}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. Опишем спектральные свойства задачи (2.4)-(2.6) (задачи (2.5)-(2.6)):

1. Если оператор iB обладает сильным B - свойством, то резольвентное множество оператора L заполняет комплексную плоскость.

2. Если оператор iB не обладает сильным B - свойством, то непрерывный спектр оператора L заполняет комплексную плоскость.

□ Изучим вначале структуру спектра дифференциального оператора $L: H \to H$, порождённого задачей (2.4)-(2.6). Пусть λ - произвольное комплексное число. Матрица Грина оператора $L_s - \lambda$ имеет вид:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = e^{\lambda(t-\tau)}\begin{cases}\begin{pmatrix} \cos(B(t-\tau)) & \sin(B(t-\tau)) \\ -\sin(B(t-\tau)) & \cos(B(t-\tau))\end{pmatrix}, 0 \le \tau \le t; \\ 0, t \le \tau \le T.\end{cases}$$

Здесь $B = B(s)$, L_s является s - проекцией оператора L. Так как $\Delta_s(\lambda) \neq 0$, то $P\varrho L = \emptyset$. Следовательно, оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ существует. Как и ранее устанавливаем, что оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ определён на множестве элементов, всюду плотном в H. Таким образом, остаточный спектр оператора L- пустое множество в силу произвольности числа λ, то есть $R\varrho L = \emptyset$.

Пусть последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}B(s_n) = \infty$.

Положим $u_n = u_n(t) = (L_{s_n} - \lambda)^{-1} e^{\lambda t} e_1$. Тогда

$$u_n^1 = u_n^1(t) = e^{\lambda t}\frac{\sin(Bt)}{B}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\|u_n^1\|_{H_t} = \infty$, то $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{H_t} = \infty$. Далее имеем

$$\|(L-\lambda)^{-1}\| \ge \frac{\left\|(L-\lambda)^{-1} e^{\lambda t}\varphi_1^{s_n}\right\|_H}{\left\|e^{\lambda t}\varphi_1^{s_n}\right\|_H} \ge -\frac{C_1}{C_2}\frac{\|u_n\|_{H_t{}^2}}{\|e^{\lambda t}\|_{H_t}}.$$

В силу сделанного ранее допущения получаем включение $\lambda \in C\varrho L$.

Если $\sup_s|\mathrm{Im}B(s_n)| < \infty$, то для элементов $G_s{}^{i,j}(t,\tau,\lambda)$ матрицы Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ имеем $\sup_s\left\|G_s{}^{i,j}\right\|_{\mathcal{L}_2(W_t)} < \infty$. Воспользовавшись теоремой 1.3, получаем включение $\lambda \in \varrho L$. Так как λ - произвольное комплексное число, то первая часть теоремы доказана полностью.

Обозначим теперь через $L: H \to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый задаче (2.5)-(2.6) в силу определения 2.1. Доказательство оставшегося проводится как и выше; матрица Грина оператора $L_s - \lambda$ представима в виде:

$$G_s(t, \tau, \lambda) = \begin{cases} A(t, \tau, \lambda), \text{если } 0 \le \tau \le t \le T; \\ 0, \text{если } 0 \le t \le \tau \le T. \end{cases}$$

Здесь

$$A(t, \tau, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos\big(b(t-\tau)\big) - \dfrac{\lambda \sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} & \dfrac{\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} \\ -\dfrac{\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} & \cos\big(b(t-\tau)\big) + \dfrac{\lambda \sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} \end{pmatrix},$$

0-нулевая матрица; $b = \sqrt{B^2 - \lambda^2}, B = B(s), L_s$ является s - проекцией оператора L. ■

Примеры

Приведем примеры, которые попадают в поле классических систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Пример 2.1. Для систем (2.1) и (2.2), в которых оператор B, порождённый операцией $B(D_x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|\alpha|=2k-1} b_\alpha {D_x}^\alpha, b_\alpha \in R$, является оператором, задача Коши корректна, точнее $-\varrho L = \mathbb{C}$. С другой стороны, для M - эллиптического дифференциального оператора B задача Коши для систем (2.1) и (2.2) не корректна: $C\varrho L = \mathbb{C}$; в этом случае корректна задача Дирихле.

Пример 2.2. Для систем (2.4) и (2.5), в которых оператор B, порождённый операцией $B(D_x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|\alpha|=2k-1} b_\alpha {D_x}^\alpha, b_\alpha \in R$, является П - оператором, задача Коши не корректна, точнее - $C\varrho L = \mathbb{C}$. С другой стороны, для M - эллиптического дифференциального оператора B задача Коши для систем (2.4) и (2.5) корректна и более того: $\varrho L = \mathbb{C}$.

Список литературы

1. Il'in, V. A., & Kuleshov, A. A. (2012). On some properties of generalized solutions of the wave equation in the classes L p and W p 1 for p ≥ 1. *Differential Equations*. V. 48(11). Pp. 1470-1476. DOI:10.1134/s0012266112110043
2. Makin, A. S. (2016). On the absence of the basis property for the root function system of the Sturm–Liouville operator with degenerate boundary conditions. *Doklady Mathematics*. V. 93(2). Pp. 220-222. DOI:10.1134/s1064562416020290
3. Mikhailov, V. P. (2012). Existence of boundary values of solutions of elliptic equations in a strip. *Sbornik: Mathematics*. V. 203(1). Pp. 60-74. DOI:10.1070/sm2012v203n01abeh004213
4. Moiseev, E. I., Korzyuk, V. I., & Kozlovskaya, I. S. (2014). Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional wave equation. *Differential Equations*. V.50(10). Pp. 1364-1377. DOI:10.1134/s0012266114100103
5. Kornienko, D. V. (2006). On a spectral problem for two hyperbolic systems. *Differential Equations*. V. 42(1). Pp. 101-111. DOI:10.1134/s0012266106010083
6. Soldatov, A.P. (2016). On the spectral radius of functional operators. *Math. Notes*. V. 100:1. Pp. 132-138. DOI: 10.1134/S0001434616070129

SPECTRAL PROPERTIES OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LINEAR SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

D.V. Kornienko
Candidate of physical and mathematical Sciences
dmkornienko@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The article is devoted to the actual problems of the theory of systems of linear partial differential equations, namely the study of the spectrum and basic properties of systems of eigenvector functions of the operator comparable to the boundary value problem. The paper deals with the Cauchy problem for two classes of systems of linear partial differential equations. The study of the solvability properties of these problems was reduced to the study of the spectral characteristics of the operator compared to it, thanks to the introduction of a generalized solution. The research was based on methods that are called functional, and the solvability properties are described in terms of the spectral theory of linear operators. Such methods were developed and widely used in their research K. Friedrichs, L. HErmander, S. L. Sobolev, A. A. desin, V. A. Ilyin, V. K. Romanko, E. I. Moiseev, A. p. Soldatov. It is well known that the most frequently studied questions in the theory of boundary value problems for differential equations are those related to the solvability of boundary value problems and the differential properties of solutions to such problems. The study of spectral problems for differential equations is more difficult. The theory of spectral problems for ordinary differential equations and for partial differential equations of elliptic type is developed quite fully. For differential equations of other types and for equations that do not belong to the classical types, the theory of spectral problems is in its infancy. From this point of view, this article is very relevant.

Keywords: Boundary Problems, Spectrum of an Operator, Spectral Properties, Systems of Partial Differential Equations, Riesz Basis, Cauchy Conditions, Basis.

References

1. Il'in, V. A., & Kuleshov, A. A. (2012). On some properties of generalized solutions of the wave equation in the classes L p and W p 1 for p ≥ 1. *Differential Equations*. V. 48(11). Pp. 1470-1476. DOI:10.1134/s0012266112110043
2. Makin, A. S. (2016). On the absence of the basis property for the root function system of the Sturm–Liouville operator with degenerate boundary conditions. *Doklady Mathematics*. V. 93(2). Pp. 220-222. DOI:10.1134/s1064562416020290
3. Mikhailov, V. P. (2012). Existence of boundary values of solutions of elliptic equations in a strip. *Sbornik: Mathematics*. V. 203(1). Pp. 60-74. DOI:10.1070/sm2012v203n01abeh004213
4. Moiseev, E. I., Korzyuk, V. I., & Kozlovskaya, I. S. (2014). Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional wave equation. *Differential Equations*. V.50(10). Pp. 1364-1377. DOI:10.1134/s0012266114100103
5. Kornienko, D. V. (2006). On a spectral problem for two hyperbolic systems. *Differential Equations*. V. 42(1). Pp. 101-111. DOI:10.1134/s0012266106010083
6. Soldatov, A.P. (2016). On the spectral radius of functional operators. *Math. Notes*. V. 100:1. Pp. 132-138. DOI: 10.1134/S0001434616070129

УДК 519.711.2

ПРИМЕНЕНИЕ КОГНИТИВНОГО ПОДХОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Елена Викторовна Игонина
к.ф.-м.н., доцент
elenaigonina7@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье рассмотрено применение когнитивного подхода для исследования управляемых динамических систем с неполной информацией. Введены основные определения: когнитивное моделирование, когнитивная модель (карта), базисные факторы, взвешенный граф. Перечислены основные типы когнитивных карт, определены разновидности и этапы построения обобщенной нечеткой когнитивной карты. Обозначены некоторые направления дальнейшего развития когнитивного подхода для моделирования систем с неполной информацией. Рассмотрено применение компьютерных систем для создания обобщенных нечетких когнитивных моделей с учетом их особенностей. Дано краткое описание прикладного пакета FuzzyLogicToolbox компьютерной среды Matlab, используемого для моделирования изучаемых систем в настоящей работе. Приведено поэтапное построение когнитивной модели в пакете FuzzyLogicToolbox управляемой маятниковой системы на основе знаний экспертово поведении объекта управления. С помощью прикладного пакета для каждой переменной определены (с учетом их терм-характеристик) значения функций принадлежности, которые варьируются в пределах отрезка [0; 1] – процедура введения нечеткости (фазификация); выбран треугольный тип функций принадлежности; использован логический вывод Мамдани; для преобразования нечеткого набора выводов в четкое число (процедура дефаззификации) использован центроидный метод. Компьютерная система тестирования позволила получить конкретные числовые значения, как для входящих переменных, так и для переменной выхода. Показано, что рассмотренный в настоящей работе когнитивный подход к исследованию систем с неполной информацией позволяет реализовать эффективное управление без использования и знания точной математической модели процесса.

Ключевые слова: управляемые системы, системы с неполной информацией, когнитивное моделирование, нечеткое моделирование.

В последнее время в России и за рубежом наметилась тенденция активного применения когнитивного подхода для исследования и моделирования сложных управляемых систем, в частности, систем с неполной информацией (СНИ). СНИ встречаются в случаях, когда объект управления (или процесс) достаточно сложен для получения его точного математического описания ввиду многообразия задействованных физических эффектов, нестационарности объекта, наличия неконтролируемых возмущающих воздействий[1]. Отметим, что отсутствие достаточных знаний о системе не является единственной неопределенностью, обусловленной субъективными причинами. Неполнота информации выражается также в неопределенности целей развития системы и критериев выбора управленческого решения. Как правило, неудовлетворенность текущим состоянием системы осознается субъектом управления, его представления о причинах и возможных способах изменения ситуации в системе размыты, нечетки и противоречивы. Формализация нечетких представлений – одна из основных задач, которую необходимо решить при разработке и исследовании моделей СНИ [2, 3]. Отметим, что субъекту управления приходится манипулировать только качественной информацией в виде интуитивных понятий, предположений, мыслить и принимать решения в количественных характеристиках ему не свойственно. Структуры знания в мышлении субъекта управления, оказываются важнейшими элементами ситуации, неустранимыми из модели принятия решений. Таким образом, моделирование изучаемой системы и принятие управленческих решений, зависимых от полученной модели, следует рассматривать как сложный интеллектуальный процесс разрешения проблем, несводимый исключительно к рациональному выбору [4]. Для поддержки этого процесса требуются новые подходы к разработке формальных моделей, методов решения проблем и формирования целей развития СНИ, особенно на ранних этапах подготовки управленческих решений.

Когнитивный подход – подход, направленный на разработку формальных моделей и методов исследования СНИ, поддерживающих интеллектуальный процесс решения проблем с помощью учета в этих моделях и методах когнитивных возможностей (восприятия, представления, познания, понимания, объяснения) субъекта управления при решении управленческих задач [2].

Получение достоверной информации и ее быстрый анализ являются важнейшими предпосылками эффективного моделирования исследуемой системы. Впервые когнитивныйподход для проведения анализа, моделирования СНИ и принятия решения субъектом управления, был предложен американским исследователем Р. Аксельродом, термин когнитивное моделирование был введен психологом Э.Толменом в 1948 г. от лат.cognitio – знание, познание; структуризация, состоящая в формировании и уточнении гипотезы о функционировании объекта. Заметим, что когнитивный анализ изначально сформировался в рамках социальной психологии, а именно – когнитивизма, занимающегося изучением процессов восприятия и познания. Применение разработок социальной психологии в теории управления привело к формированию особой отрасли знаний – когнитологии, концентрирующейся на исследовании проблем управления и принятия решений. Сегодня когнитивный подход развивается в направлении совершенствования аппарата анализа и моделирования слабоструктурированных динамических систем и СНИ. Теоретические достижения когнитивного подхода являются основой для создания компьютерных сред, ориентированных на решение прикладных задач в теории моделирования управляемых систем, в частности СНИ [5, 6].

Под *когнитивным моделированием* понимают исследование функционирования и развития СНИ посредством построения их модели на основе когнитивной модели (карты) [2]. *Когнитивная карта*(КК) отражает субъективные представления (индивидуальные или коллективные) исследуемой проблемы, ситуации, связанной с функционированием и развитием СНИ. Компонентами КК являются базисные факторы и причинно-следственные связи между ними. *Базисные факторы*– это факторы, определяющие и ограничивающие наблюдаемые явления, и процессы в системе и окружающей ее среде, и интерпретированные субъектом управления как существенные, ключевые параметры, признаки этих явлений и процессов. Изначально, при становлении когнитивного подхода имело место формальное представление КК в виде ориентированного графа(знакового графа), вершинам которого сопоставлены факторы, а ребрам – знаки (+ или –). В последнее время все чаще КК представляется в виде *взвешенного графа,* в котором вершинам сопоставляются факторы, а ребрам – веса в той или иной шкале. Ориентированный граф, у которого определены веса его дуг, называется функциональным.

В зависимости от значений, которые может принимать ребро ориентированного графа, КК подразделяют на традиционные (простые) и на нечеткие когнитивные карты (НКК).НКК или иначе нечеткая когнитивная модель (FuzzyCognitiveMaps – FCM) является результатом объединения двух научных направлений – нечеткой логики (“fuzzylogic”), созданной в 60-х годах профессором Лотфи Заде [7], и системной динамики (“systemdynamics”).Понятие FCM для моделирования причинных взаимосвязей, выявленных между концептами некоторой области, было введено в 1986 г. Б. Коско [8]. Анализ когнитивной модели позволяет быстро получить информацию о поведении системы без наличия ее математической модели, а в некоторых случаях провести численные эксперименты. В отличие от простых когнитивных карт, FCM представляют собой нечеткий ориентированный граф с обратной связью, узлы которого являются нечеткими множествами. Направленные ребра графа не только отражают причинно-следственные связи между концептами, но и определяют степень влияния (вес) связываемых концептов. Простые FCM, или традиционные когнитивные карты, содержат связи, которые могут принимать одно из трех значений из множества $\{-1, 0, 1\}$.

Отечественными исследователями предложен новый тип когнитивных карт – *обобщенные нечеткие когнитивные карты* [9]. Они представляют собой нечеткую причинно-следственную сеть вида $G = (E,W)$, где $E =\{e_1, e_2, . . . , e_p\}$ – множество концептов, $\{w(e_i, e_j)\}$ – множество связей между ними. Каждый концепт e_i, $i = 1, . . .,P$ характеризуется терм-множеством лингвистической переменной $T_i= \{T_{i1}, T_{i2}, . . . , \mathrm{T}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{m_j}}\}$, где m_j– число типовых состояний концепта. Для описания каждого терма T_{ik} строится терм-множество с функцией принадлежности$\mu_{\mathrm{T^i_k}}(\mathrm{x})$. Связи между типовыми состояниями каждой пары концептов задаются нечеткими переменными, описываемыми соответствующими нечеткими множествами.

Разновидность обобщенной нечеткой когнитивной карты определяется выбранной формой функций принадлежности (треугольная, трапециидальная, гауссова и др.), способом нечеткого логического вывода(по Мамдами, Цукамото, Ларсену), процедуры деффазификации и некоторыми другими параметрами и свойствами. Отметим, что в [10] проведено исследование и дан сравнительный анализ различных типов нечетких логических выводов (алгоритмов), аппроксимирующих заданную СНИ.

Проведение когнитивного анализа и моделирования СНИ является крайне сложной задачей, для решения которой привлекаются прикладные компьютерные системы. В работе дано описание разработанных российским учеными компьютерных систем моделирования КК с учетом их разновидностей [6]. Заметим, что не менее эффективным инструментом для моделирования СНИ является пакет FuzzyLogicToolbox компьютерной среды Matlab. Так в [11] рассмотрено применение нечетко-когнитивного подхода в задаче управления процессов выплавки FESI.Указанный программный пакет состоит из встроенных GUI-модулей (GraphicalUserInterface, GUI), создающих понятийную среду и обеспечивающих легкое продвижение по всем этапам проектирования системы[12]:

- FuzzyInferenceSystemEditor (FIS) – редактор общих свойств системы с логическим регулятором, с помощью которого можно установить число входов и выходов системы, выбрать тип системы (Суджено, Мамдани), метод дефаззификации, реализацию логических операций или выполнить переход к другим GUI-модулям;
- MembershipFunctionEditor – редактор функций принадлежности, который выводит на экран графики функций принадлежности входных и выходных переменных. Позволяет выбрать количество термов для лингвистической оценки входных и выходных переменных, а также задать тип и параметры функции принадлежности каждого терма;
- RuleEditor – редактор базы знаний позволяет задавать и редактировать правила в лингвистическом, логическом и индексном формате. Редактирование правил осуществляется выбором необходимого сочетания термов из меню;
- RuleViewer – браузер логического вывода., который визуализирует выполнение логического вывода по каждому правилу, получение результирующего трем-множества и его дефаззификацию;
- SurfaceViewer – браузер поверхности «входы-выход» управляемой системы. Строит графики зависимости выходной переменной от любых двух входных переменных.

В качестве примера рассмотрим процедуру когнитивного анализа и моделирования управляемой маятниковой системы (на примере управляемого обратного маятника).

Воспользуемся экспертными данными о поведении объекта управления, изложенными в работе [13]. Проектирование модели основано на построении зависимости управляющего воздействия u, вырабатываемого регулятором, от угла отклонения x_1 маятника от вертикали и от его угловой скорости x_2. Для описания входных переменных x_1 и x_2 введены следующие термы: отрицательная большая (ОБ), отрицательная(О), нулевая (Н), положительная (П), положительная большая (ПБ). Переменная выхода u описывается термами: очень большая отрицательная (оБО), большая отрицательная (БО), отрицательная (О), нулевая (Н), положительная (П), большая положительная (БП), очень большая положительная (оБП). Зависимость переменной выхода от значений входящих переменных представлено в табл. 1.

Таблица 1.

Зависимость переменной выхода u от значений входящих переменных x_1 и x_2

Угол отклонения (x_1)	Угловая скорость (x_2)				
	ОБ	О	Н	П	БП
ОБ	оБО	оБО	БО	О	Н
О	оБО	БО	О	Н	П
Н	БО	О	Н	П	БП
П	О	Н	П	БП	оБП
БП	Н	П	БП	оБП	оБП

Заметим, что в работе автора [14] выполнена редукция представленной базы правил: число правил уменьшено до четырех:

Правило 1: если x_1 = П и x_2 = О, то u = Н.

Правило 2: если x_1 = О и x_2 = П, то u = Н.

Правило 3: если x_1 = П и x_2 = П, то u = БП.

Правило 4: если x_1 = О и x_2 = О, то u = БО.

Пошаговое проектирование динамики управляемого обратного маятника проводится на основе полученной базы правил с использованием GUI-модулей пакета FuzzyLogicToolbox. На основе FIS-редактора представляется общая информация об управляемой системе: количество входных переменных, переменная выхода, алгоритм Мамдани (рис. 1). С помощью модуля RuleEditor формируются функции принадлежности для переменных. В данном модуле для каждой переменной выбран треугольный тип функции принадлежности, преимущество которого перед другими видами обусловлено простотой их вычислительной реализации, и тем, что они позволяют сформировать модели, обладающие хорошими аппроксимирующими свойствами.

На рис. 2 представлен вид окна редактора функций принадлежности, в частности для входящей переменной – угол отклонения введены термы (ОБ, О, Н, П, ПБ) и определен треугольный вид функции принадлежности. Аналогичные действия проводятся для второй входящей переменнойx_2 и переменной выхода u.

Формирование базы правил регулятора, осуществляющего управление, проводится с помощью модуля RuleEditor, результаты представлены на рис. 3. Визуализация логического вывода осуществляется с помощью модуля RuleViewer. Указанный модуль иллюстрирует для каждого правила ход логического вывода, нахождение результирующего нечеткого множества и процесс дефаззификации, т.е. позволяет увидеть числовые значения входящих переменных и переменной выхода (рис. 4.).

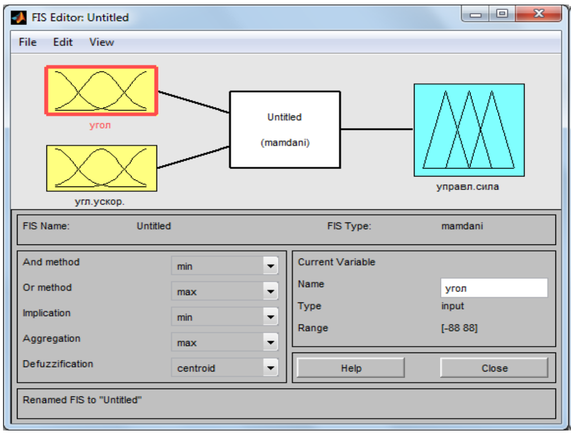


Рис. 1. Вид окна FIS-редактора

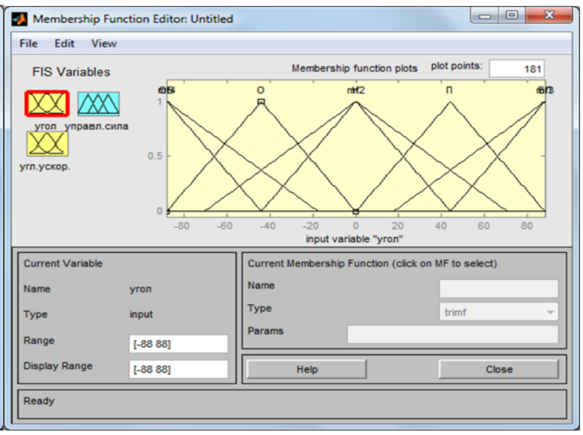


Рис. 2. Окно редактора функций принадлежности

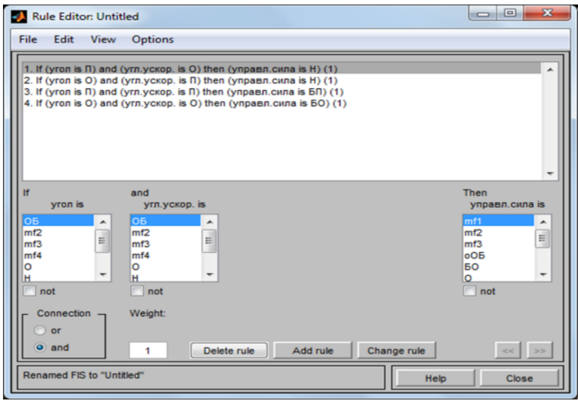


Рис. 3. Окно редактора RuleEditor

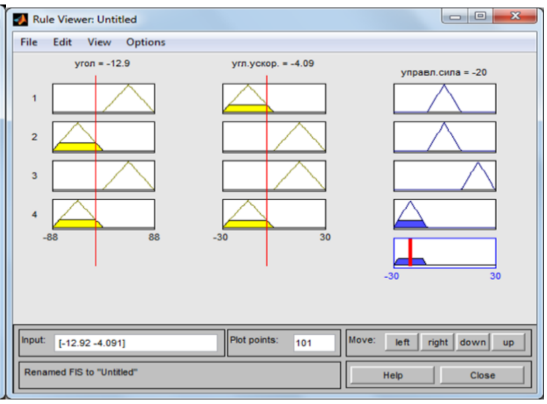


Рис. 4. Окно редактора Rule-Viewer

Результат отображения входов в выход воздействия, оказываемого регулятором на маятник можно представить в виде полилинейной гиперповерхности с помощью модуля View-Surface (рис. 5). Полученная поверхность характеризует функционирование регулятора для возможных значений лингвистических переменных.

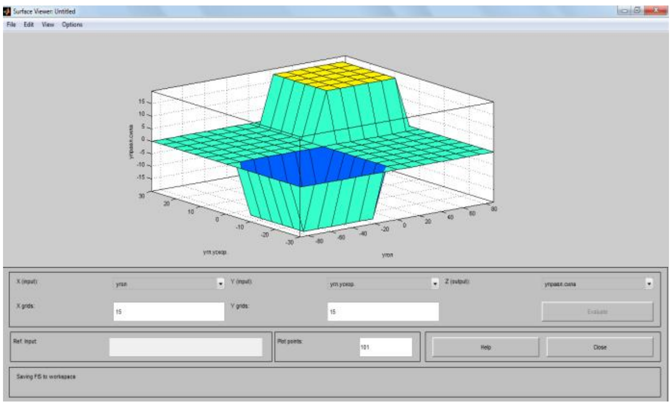


Рис. 5.Окно модуля SurfaceViewer

В заключении отметим, что рассмотренный в настоящей работе когнитивный подход к исследованию СНИ позволяет реализовать эффективное управление такими системами без построения точной математической модели. Как известно, данный подход имеет недостаток, заключающийся в субъективности мнений экспертов. Поэтому перспективным направлением является разработка алгоритмов и методов обучения обобщенных нечетких когнитивных карт на экспериментальных данных. Наглядность НКК, возможности проведения численного моделирования, а также комбинирование экспертного и адаптивного подходов для построения базы лингвистических правил делают обобщенные НКК удобным средством описания СНИ.

Список литературы

1. Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией: алгоритмическое конструирование. М.: УРСС, 2007.
2. Авдеева З.К., Коврига С.В., Макаренко Д.И. Когнитивное моделирование для решения задач управления слабоструктурированными системами (ситуациями) // Управление большими системами: сборник трудов. 2006. № 16. С. 26–39.
3. Борисов В.В., Федулов А.С. Нечеткий когнитивный анализ и моделирование слабо формализуемых проблем // Материалы XIX Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ «Системы компьютерной математики и их приложения». Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 113–117.
4. Луценко Е.В., Серга Г.В. Теория информации и когнитивные технологии в моделировании сложных многопараметрических динамических технических систем // Научный журнал КубГАУ, №121(07). 2016. С.68–115.
5. Малинецкий Г.Г. Когнитивный вызов и информационные технологии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010 № 46 28.
6. Кулинич А.А. Компьютерные системы моделирования Когнитивных карт: подходы и методы // Проблемы управления. 2013. №3. С.2–16.
7. Zadeh L. Fuzzy Sets (1965). Information and Control. V. 8(3). Pp.338–353.
8. Kosko B. Fuzzy Cognitive Maps (1986). International Journal of Man-Machine Studies. V. 24.P p. 65–75.
9. Федулов А. С., Борисов В. В. Модели системной динамики на основе нечетких реляционных когнитивных карт // Системы управления, связи и безопасности. 2016. №1. С.66–80.
10. Масина О.Н., Дружинина О.В. Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011. .
11. Михалев А.И., Новикова Е.Ю. Нечетко-когнитивный подход в задаче управления процессов выплавки FESI // АСАУ. 2006. №9(29). С. 133–139.
12. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. М.: Телеком, 2007.
13. Ротштейн А.П., Кательников Д.И. Идентификация нелинейных объектов нечеткими базами знаний // Кибернетика и системный анализ. 1998. №5. С. 53–61.
14. Игонина Е.В. Исследование устойчивости и компьютерное моделирование маятниковой системы управления // Материалы I школы-семинара молодых ученых «Фундаментальные проблемы системной безопасности» (г. Елец, 20–22 ноября 2014). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина. 2014. С. 93–99.

APPLICATION OF THE COGNITIVE APPROACH TO THE STUDY OF SYSTEMS WITH INCOMPLETE INFORMATION

E.V. Igonina
Can.Sci. (Phys.-Math.), associate professor
elenaigonina7@mail.ru
Yelets
Bunin Yelets State University

Abstract. The article considers the application of the cognitive approach to the study of controlled dynamic systems with incomplete information. The main definitions are introduced: cognitive modeling, cognitive model (map), basic factors, weighted graph. The main types of cognitive maps are listed, the varieties and stages of constructing a generalized fuzzy cognitive map are determined. Some directions of further development of cognitive approach for modeling systems with incomplete information are indicated. Application of computer systems for creation of the generalized fuzzy cognitive models taking into account their features is considered. A brief description of the Fuzzy Logic Toolbox application package of the Matlab computer environment used to model the systems under study in this paper is given. A step-by-step construction of a cognitive model in the Fuzzy Logic Toolbox package of a controlled pendulum system based on the knowledge of experts about the behavior of the control object is given. With the help of an application package for each variable were determined (taking into account their term-characteristics) the values of membership functions, which vary within the interval [0; 1] – the procedure for introducing fuzzy (phasification); selected triangular type of membership functions; used logical conclusion Mamdani; to convert a fuzzy set of conclusions in a clear number (defuzzification procedure) used centroid method. The computer system of testing allowed to obtain specific numerical values for both input and output variables. It is shown that the cognitive approach to the study of systems with incomplete information considered in this paper allows to implement effective management without the use and knowledge of an accurate mathematical model of the process.

Keywords: controlled systems, systems with incomplete information, cognitive modeling, fuzzy modeling.

References

1. Afanas'ev, V.N. (2007). Dynamic control systems with incomplete information: algorithmic design [*Dinamicheskie sistemy upravleniya s nepolnoj informaciej: algoritmicheskoe konstruirovanie*]. Moscow.
2. Avdeeva, Z.K., Kovriga, S.V., Makarenko, D.I. (2006). Cognitive modeling for solving control problems of semi-structured systems (situations) [*Kognitivnoe modelirovanie dlya resheniya zadach upravleniya slabostrukturirovannymisi stemami (situaciyami)*]. *Managing large systems: proceedings*. V. 16. Pp. 26–39.
3. Borisov,V.V., Fedulov,A.S. (2018). Fuzzy cognitive analysis and modeling of weakly formalized problems [*Nechetkij kognitivnyj analizi modelirovanie slaboformalizuemyh problem*]. *Proceedings of the XIX International scientific conference dedicated to the 100th anniversary of the faculty of physics and mathematics of Smolensk state University "Systems of computer mathematics and their applications».*V. 19. Pp. 113–117.
4. Lucenko, E.V., Serga, G.V. (2016). Information theory and cognitive technologies in modeling of complex multiparameter dynamic technical systems [*Teoriya informacii i kognitivnye tekhnologii v modelirovanii slozhnyh mnogoparametricheskih dinamicheskih tekhnicheskih system*]. *The scientific journal of the Kuban state agrarian University*. V. 121(07). Pp.68–115.

5. Malineckij, G.G. (2010). Cognitive challenge and information technology [*Kognitivnyj vyzov i informacionnye tekhnologii*].*The Preprint IPM im. M. V. Keldysh*.V. 46. 28 p.
6. Kulinich, A.A. (2013). Computer systems for modeling Cognitive maps: approaches and methods [*Komp'yuternye sistemy modelirovaniya Kognitivnyh kart: podhody i metody*].*Management problem*. V.3. Pp.2–16.
7. Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets [Fuzzy Sets].*Information and Control*. V. 8(3). Pp.338–353.
8. Kosko, B. (1986). [*Fuzzy Cognitive Maps*]. *International Journal of Man-Machine Studies*. V. 24. Pp. 65–75.
9. Fedulov, A. S., Borisov, V. V.(2016).Models of system dynamics based on fuzzy relational cognitive maps [*Modeli sistemnoj dinamiki na osnove nechetkih relyacionnyh kognitivnyh kart*].*Control, communication and security systems.*V. 1. Pp.66–80.
10. Masina, O.N., Druzhinina, O.V. (2011). Modeling and stability analysis of some classes of control systems. [*Modelirovanie i analiz ustojchivosti nekotoryh klassov sistem upravleniya*]. Moscow. 164 p.
11. Mihalev,A.I., Novikova,E.Yu. (2006). Fuzzy-cognitive approach to the problem of FE SI smelting process control [*Nechetko-kognitivnyj podhod v zadache upravleniya processov vyplavki FESI*].*ASAU***.**V.9(29). P. 133–139.
12. Shtovba, S.D. (2007).Design of fuzzy systems by means of MATLAB [*Proektirovanie nechetkih system sredstvami MATLAB*]. *Moscow*.
13. Rotshtejn,A.P., Katel'nikov,D.I. (1998). Identification of nonlinear objects by fuzzy knowledge bases [*Identifikaciya nelinejnyh ob"ektov nechetkimi bazami znanij*]. Cybernetics and systems analysis. V.5. Pp. 53–61.
14. Igonina, E.V. (2014). Stability study and computer simulation of the pendulum control system [*Issledovanie ustojchivosti i komp'yuternoe modelirovanie mayatnikovoj sistemy upravleniya*]. Materials of the I school-seminar of young scientists "Fundamental problems of system security". Bunin Yelets State University. Pp. 93–99..

УДК 517.9, 519.6

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СООБЩЕСТВ

Екатерина Дмитриевна Тарова
katerina.tarova@yandex.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Работа посвящена исследованию устойчивости многомерных математических моделей популяционной динамики. Рассмотрены вопросы синтеза и анализа многомерных моделей динамики численности взаимосвязанных сообществ. Построена обобщенная многомерная динамическая модель с учетом различных типов взаимодействий фазовых переменных. Предложены условия устойчивости на основе принципа редукции задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений других типов уравнений. Указанный принцип предполагает переход от векторных обыкновенных дифференциальных уравнений к векторному дифференциальному включению и нечёткому дифференциальному уравнению, с учётом изменения параметров того или иного типа в исследуемых моделях. Для трехмерной модели, являющейся частным случаем многомерной модели, проведена оценка модельных параметров и построены фазовые портреты. Найдены стационарные состояния, проведены серии компьютерных экспериментов и исследована устойчивость указанной модели с помощью инструментального программного обеспечения, символьных вычислений и численных методов. Рассмотренный подход может найти применение в задачах исследования нелинейных моделей с различными типами взаимодействия.

Ключевые слова: динамическая модель, популяционная динамика, символьные вычисления, устойчивость, фазовый портрет, принцип редукции.

При построении динамических моделей высокой размерности в ходе аналитического исследования могут возникать существенные трудности. Компьютерное моделирование позволяет не только получить результаты численных экспериментов в рамках анализа стационарных состояний, поиска траекторий решений и оценки модельных параметров, но и выявить эффекты, обусловленные структурой модели. В настоящее время актуальными являются задачи построения динамических моделей высокой размерности и выявление качественных эффектов в результате аналитического и численного исследования таких моделей. Вопросы качественного исследования различных моделей популяционной динамики рассматривались в [1–9] и в других работах. В [3, 7] проведено исследование устойчивости классических и обобщенных моделей Лотки–Вольтерра с помощью метода функций Ляпунова. В [6] описан системный подход к исследованию устойчивости математических моделей, позволяющий с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости решений дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений.

В настоящей статье проведено компьютерное моделирование трехмерной модели динамики численности взаимосвязанных сообществ с учетом конкуренции. Построены фазовые портреты системы. На основе проведения серии компьютерных экспериментов проанализирована динамика популяций при различных начальных условиях. Кроме того, проведена линеаризация системы в окрестности стационарных состояний и исследована устойчивость по первому приближению. Построена многомерная модель динамики численности взаимосвязанных сообществ и получены условия устойчивости на основе принципа редукции.

Рассмотрим нелинейную модель динамики численности взаимосвязанных сообществ, учитывающую конкуренцию жертв, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(\alpha_1 - \beta_1 x_1 - \kappa x_2 - \gamma_1 x_3),\\
\dot{x}_2 &= x_2(\alpha_2 - \kappa x_1 - \beta_2 x_2 - \gamma_2 x_3),\\
\dot{x}_3 &= x_3(-c + d_1 x_1 + d_2 x_2),
\end{aligned} \tag{1}$$

где x_1, x_2 – плотность популяций жертв, x_3 – плотность популяции хищника, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \kappa,$ $\gamma_1, \gamma_2, d_1, d_2, c$ – положительные параметры.

В результате решения соответствующих алгебраических уравнений для модели (1) получены семь стационарных состояний:

$$P_1(0,0,0),\ P_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, 0, 0\right),\ P_3\left(0, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, 0\right),\ P_4\left(\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_3}, \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}, 0\right),\ P_5\left(\frac{c}{d_1}, 0, \frac{d_1\alpha_1 - c\beta_1}{d_1\gamma_1}\right),\ P_6\left(0, \frac{c}{d_2}, \frac{d_2\alpha_2 - c\beta_2}{d_2\gamma_2}\right),$$

$$P_7\left(\frac{d_2\varepsilon_6 + c\varepsilon_1}{d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2}, \frac{c\varepsilon_2 - d_1\varepsilon_6}{d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2}, \frac{d_1\varepsilon_5 + d_2\varepsilon_4 - c\varepsilon_3}{d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2}\right),$$

где

$$\kappa\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = \varepsilon_1,\ \kappa\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 = \varepsilon_2,\ \kappa^2 - \beta_1\beta_2 = \varepsilon_3,\ \kappa\alpha_1 - \alpha_2\beta_1 = \varepsilon_4, \kappa\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 = \varepsilon_5, \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 = \varepsilon_6.$$

Найдены условия существования неотрицательных стационарных состояний:

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, 0 < \beta_2 < \frac{\alpha_2^2\beta_1}{\alpha_1^2}, 0 < \kappa < \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2}, \gamma_1 > 0, 0 < \gamma_2 < \frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1}, c > 0,$$

$$d_1 \geq \frac{c\beta_1}{\alpha_1}, \frac{c\beta_2}{\alpha_2} \leq d_2 \leq \frac{c\kappa\gamma_2 - c\beta_2\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}.$$

Для численного эксперимента были выбраны следующие наборы параметров: начальные значения $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 0.5$, значения параметров $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 0.9,$ $\beta_2 = 0.8, \kappa = 0.5, \gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 1.4, c = 2, d_1 = 1.7, d_2 = 1.2$.

На рис. 1 представлены траектории решений модели (1) при указанных начальных значениях и значениях параметров на временном интервале [0,10].

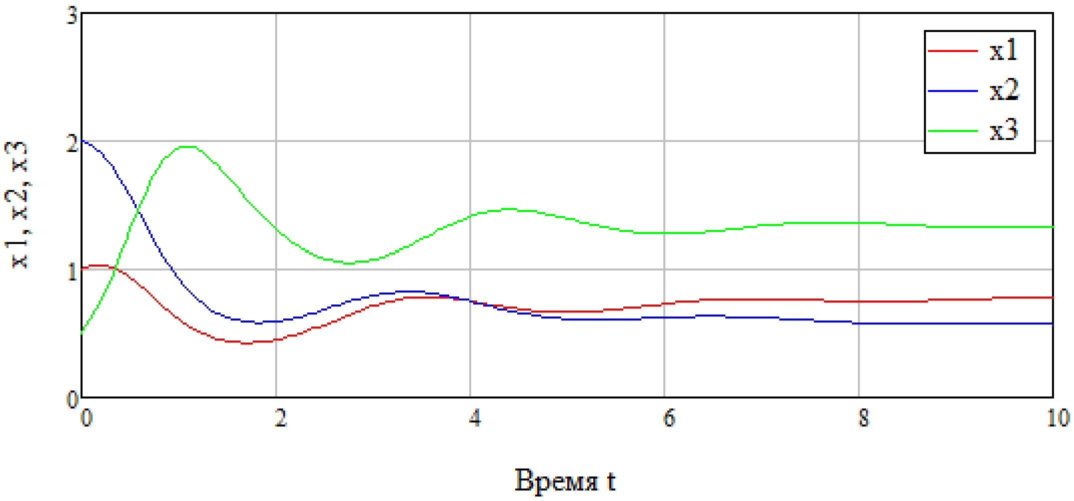
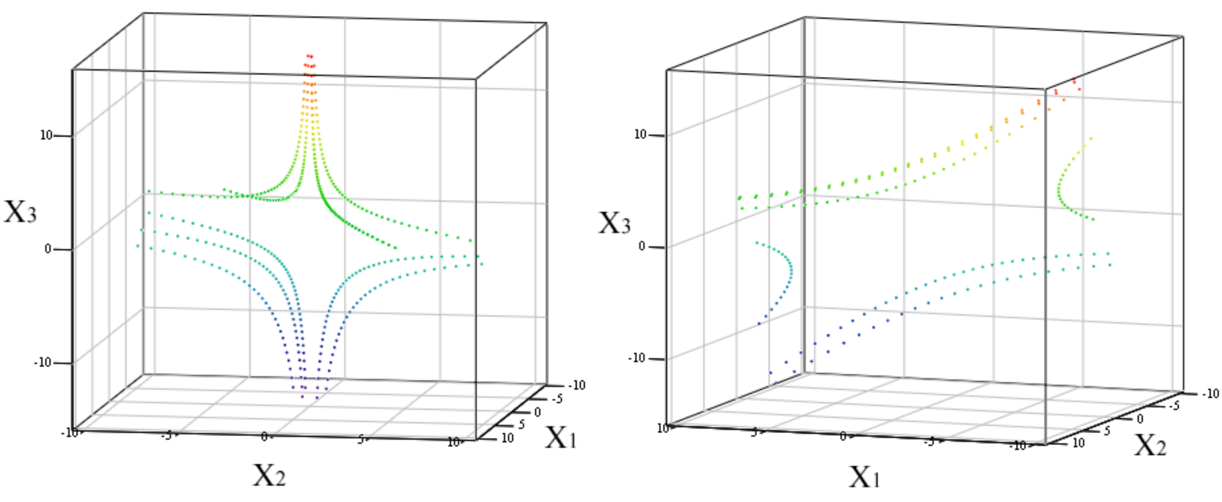
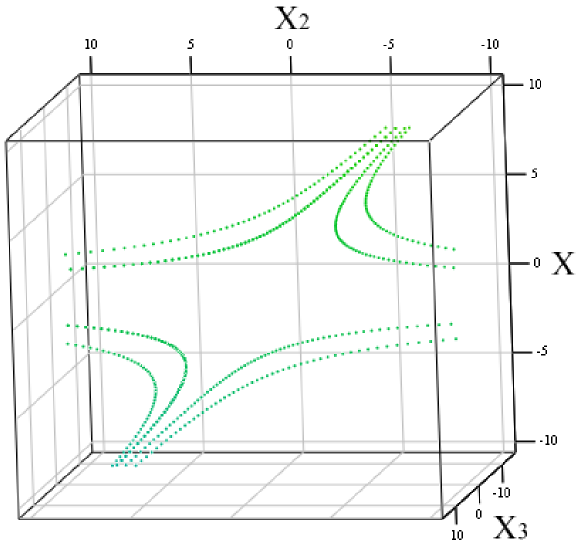


Рис. 1. График траекторий решений модели (1) при начальном условии
$x_1, x_2, x_3 = 1, 2, 0.5$

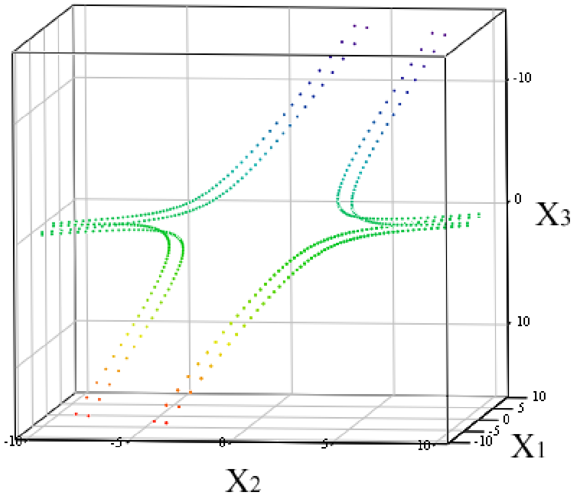
Кроме того, проведена линеаризация системы (1) в окрестности стационарных состояний и исследована устойчивость по первому приближению. Трехмерные фазовые портреты модели (1) в окрестностях стационарных состояний P_1 – P_7 представлены соответственно на рис. 2, а) – ж).



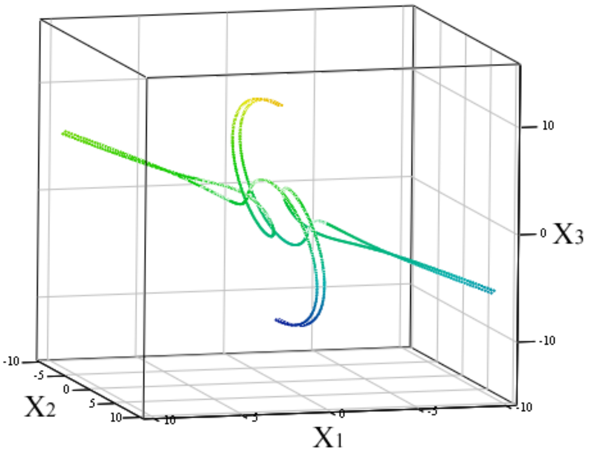
а) P_1 б) P_2



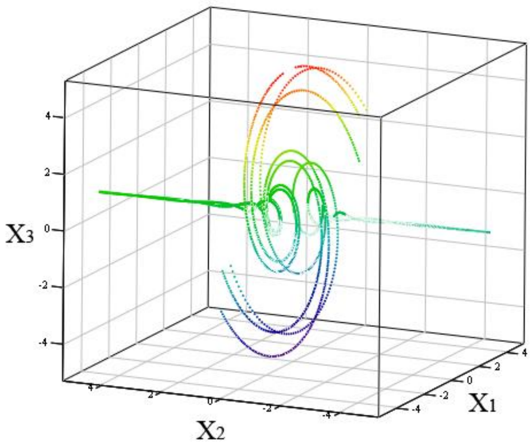
в) P_3



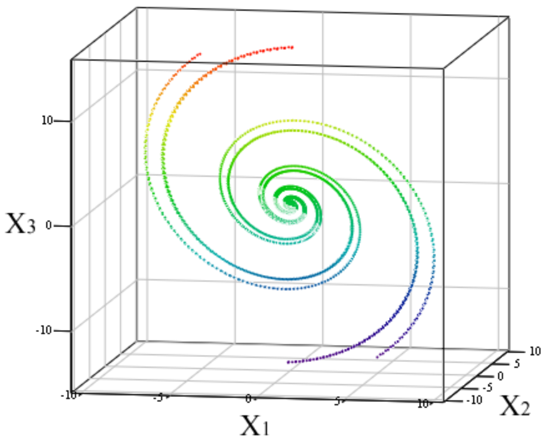
г) P_4



д) P_5



е) P_6



ж) P_7

Рис. 2. Фазовые портреты в окрестностях стационарных состояний $P_1 - P_7$ модели (1)

Фазовые портреты, соответствующие стационарным состояниям P_1, P_2, P_3, P_4, являются седлом. Точки P_5, P_6 – седло-фокусы, точка P_7 – асимптотически устойчивый узло-фокус.

На основании результатов исследования можно заключить, что неотрицательные стационарные состояния $P_i, i=1,\ldots,6$ при заданных начальных условиях являются неустойчивыми, а положительное состояние равновесия P_7 – асимптотически устойчивым по первому приближению. Таким образом, показано, что устойчивость модели имеет место при наличии всех трех популяций, а отсутствие одного из видов приводит к неустойчивости.

От трехмерной математической модели (1) выполним переход к построению обобщенной многомерной модели вида:

$$\begin{gathered}\dot{x}_i = x_i(\alpha_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j - \gamma_i y),\ \ i=1,\ldots,n,\\ \dot{y} = y(-c + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j),\end{gathered} \tag{2}$$

где $n \in N$, N – множество натуральных чисел. Модель (1) является частным случаем модели (2) в предположении, что коэффициенты межвидовой конкуренции в популяциях жертв совпадают ($p_{12} = p_{21} = \kappa$). Модель (2) может быть использована при описании динамики численности видового сообщества, которое обеспечено разнообразием взаимодействующих видов нижнего трофического уровня.

Модель (2) представим в векторной форме:

$$dx/dt = f(x), \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(x) = (f_1, f_2, \ldots, f_n) = (x_1(\alpha_1 - p_{11}x_1 - \ldots - p_{1q}x_q - \gamma_1 x_n), \ldots, x_q(\alpha_q - - p_{q1}x_1 - \ldots - p_{qq}x_q - \gamma_q x_n), y_n(-c + d_{11}x_1 + \ldots + d_{1q}x_q))$, $q = n-1,\ x \in R_+^n,\ R_+ = [0, \infty)$, $f: R_+^n \to R_+^n$, R_+^n – n-кратное декартово произведение множества R_+ на себя.

Коэффициенты $\alpha_q, p_{iq}, \gamma_q, d_{iq}$ модели (3) могут, с учетом экологического смысла, принимать различные значения из соответствующих интервалов $[\alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}], [p_{i_1q}, p_{i_2q}], [\gamma_{q_1}, \gamma_{q_2}]$, $[d_{i_1q}, d_{i_2q}]$. Для модели (3) построим конечномерное дифференциальное включение следующего вида:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 \in x_1(\alpha_1 - p_{11}x_1 - \ldots - p_{1q}x_q - \gamma_1 x_q), \ldots, \dot{x}_q \in x_q(\alpha_q - p_{q1}x_1 - \ldots - p_{qq}x_q - \gamma_q x_q),\\ \dot{x}_n \in x_n(-c + d_{11}x_1 + \ldots + d_{1q}x_q)).\end{gathered} \tag{4}$$

Перепишем модель (4) в векторной форме:

$$dx/dt \in F(x), \tag{5}$$

где $F(x) = \{ f(x) \,|\, \alpha_q \in A_q,\ p_{iq} \in P_{iq}, \gamma_q \in G_q, d_{iq} \in D_{iq} \}$, $A_q ::= [\alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}], P_{iq} ::= [p_{i_1q}, p_{i_2q}], G_q ::= = [\gamma_{q_1}, \gamma_{q_2}], D_{iq} ::= [d_{i_1q}, d_{i_2q}], F: R_+^n \to 2^{R_+^n}$. Введенные множества A_q, P_{iq}, G_q, D_{iq} определяют множества значений соответствующих параметров $\alpha_q, p_{iq}, \gamma_q, d_{iq}$.

Подмножества

$$\begin{gathered}\{A_q\}_\alpha = \{\alpha_q \,|\, \mu_{A_q}(\alpha_q) \ge \alpha\}, \{P_{iq}\}_\alpha = \{p_{iq} \,|\, \mu_{P_{iq}}(p_{iq}) \ge \alpha\}, \{G_q\}_\alpha = \{\gamma_q \,|\, \mu_{G_q}(\gamma_q) \ge \alpha\},\\ \{D_{iq}\}_\alpha = \{d_{iq} \,|\, \mu_{D_{iq}}(d_{iq}) \ge \alpha\}\end{gathered} \tag{6}$$

представляют собой более узкие множества, которые были получены при учете дополнительного условия $\alpha \in (0,1]$, влияющего на взаимодействие компонент, а следовательно, и на устойчивость модели (3).

С учетом подмножеств (6), векторное уравнение (3) можно заменить на нечеткое конечномерное дифференциальное уравнение вида:

$$dX / dt = F(\mathrm{X}), \tag{7}$$

где $F : Z_+^n \to P(R_+^n), P(R_+^n)$ – совокупность всех нечетких подмножеств из R_+^n.

Соответствующее уравнению (7) дифференциальное включение имеет вид: $d\phi / dt \in F_\alpha(\phi)$, где $\alpha \in (0,1]$, $F_\alpha(\phi) = \left\{ f(\phi(t)) \middle| \alpha_q \in \left\{A_q\right\}_\alpha, p_{iq} \in \left\{P_{iq}\right\}_\alpha, \gamma_q \in \left\{G_q\right\}_\alpha, d_{iq} \in \left\{D_{iq}\right\} \right\}$.

На основе принципа сведения задачи об устойчивости дифференциального включения к задаче об устойчивости нечеткого дифференциального уравнения и с учетом (2)–(5) получены следующие условия устойчивости дифференциального включения (5) и нечеткого уравнения (7): 1) если для замкнутого множества $M \subset R_+^n$ существует функция Ляпунова V относительно дифференциального включения (5), для которой верно неравенство $D_+V(x) \le 0$ $\forall x \in B(M, r)$, где $D_+V(x) = \sup DV(x)$ – верхняя производная функции Ляпунова, а множество $B(M,\ r)$ – r-окрестность множества M, то множество M устойчиво относительно этого включения; 2) если верно неравенство $D_+V(x) \le -w(e(x, M))\ \forall x \in B(M, r)$, где функция $w : B(M, r) \to R$ непрерывна и положительна вне M, то множество M асимптотически устойчиво относительно включения (5); 3) если для замкнутого нечеткого множества $M \subset P(R_+^n)$ существует функция Ляпунова V относительно уравнения (7), для которой при $\alpha \in (0,1]$ верно неравенство $D_+V_\alpha(x) \le 0\ \forall x \in B(M_\alpha, r)$, то множество M α-устойчиво относительно этого уравнения; 4) если выполняется условие $D_+V_\alpha(x) \le -w_\alpha(e(x, M_\alpha))\ \forall x \in B(M_\alpha, r)$, где функция $w_\alpha : (0, r) \to R$ непрерывна и положительна, то множество M α-асимптотически устойчиво относительно уравнения (7).

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития методов построения и анализа устойчивости математических моделей популяционной динамики, в частности, в направлении развития результатов [6, 8].

Список литературы

1. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic M, Masina O.N., Mijajlovic N. Synthesis and analysis of multidimensional mathematical models of population dynamics // Proceedings of the Selected Papers of the 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT (Moscow, Russia, November 5–9, 2018). New York: IEEE Xplore Digital Library. IEEE Catalog Number CFP 1863G-USB. P. 361–366.
2. Lotka A. Elements of physical ecology. Baltimora: Williams and Wilkins, 1925.
3. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
5. Александров А.Ю., Платонов А.В., Старков В.Н., Степенко Н.А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: «Лань», 2017.
6. Дружинина О.В., Масина О.Н. Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2009.
7. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983.

8. Тарова Е.Д. Качественное исследование четырехмерной модели популяционной динамики с помощью первого метода Ляпунова // Нелинейный мир. 2018. № 3. С. 17–24.
9. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.

RESEARCH OF THE STABILITY OF MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICAL MODELS OF POPULATION DYNAMICS

E.D. Tarova
katerina.tarova@yandex.ru
Elets

Bunin Yelets State University

Abstract. The work is devoted to the research of the stability of multidimensional mathematical models of population dynamics. The problems of synthesis and analysis of multidimensional models of the dynamics of the number of interconnected communities are considered. A generalized multidimensional dynamic model is constructed taking into account various types of interactions of phase variables. Stability conditions are proposed based on the reduction principle of the problem of the stability of solutions of differential inclusions to the problem of the stability of solutions of other types of equations. This principle implies a transition from vector ordinary differential equations to vector differential inclusion and a fuzzy differential equation, taking into account changes in the parameters of a particular type in the models under study. For a three-dimensional model, which is a special case of a multidimensional model, model parameters have been estimated and phase portraits have been constructed. Stationary states were found, a series of computer experiments were carried out, and the stability of this model was investigated using tool software, symbolic calculations and numerical methods. The considered approach may find application in the study of nonlinear models with different types of interaction.

Keywords: dynamic model, population dynamics, symbolic calculations, stability, phase portrait, principle of reduction.

References

1. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic M, Masina O.N., Mijajlovic N. (2018). Synthesis and analysis of multidimensional mathematical models of population dynamics. *Proceedings of the Selected Papers of the 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT* (Moscow, Russia, November 5–9, 2018). New York: IEEE Xplore Digital Library. IEEE Catalog Number CFP 1863G-USB. Pp. 361–366.
2. Lotka A. (1925). Elements of physical ecology. Baltimora: Williams and Wilkins.
3. Bazykin A.D. (2003). Nonlinear dynamics of interacting populations [*Nelinejnaya dinamika vzaimodejstvuyushchih populyacij*]. Moscow - Izhevsk: Institute of Computer Research.
4. Vol'terra V. (1976). The mathematical theory of the struggle for existence [*Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie*]. Moscow: Science.
5. Alexandrov A.Yu., Platonov A.V., Starkov V.N., Stepenko N.A. (2017). Mathematical modeling and research of the stability of biological communities [*Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie ustojchivosti biologicheskih soobshchestv*]. St. Petersburg: «Doe».

6. Druzhinina O.V., Masina O.N. (2009). Research methods for the stability and controllability of fuzzy and stochastic dynamical systems [*Metody issledovaniya ustojchivosti i upravlyaemosti nechetkih i stohasticheskih dinamicheskih sistem*]. Moscow: CC RAS.
7. Pykh Yu.A. (1983). Equilibrium and stability in models of population dynamics [*Ravnovesie i ustojchivost' v modelyah populyacionnoj dinamiki*]. Moscow: Science.
8. Tarova E.D. (2018). A qualitative study of a four-dimensional model of population dynamics using the first Lyapunov parameter [*Kachestvennoe issledovanie chetyrekhmernoj modeli populyacionnoj dinamiki s pomoshch'yu pervogo metoda Lyapunova*] // Nonlinear World. V. 3. Pp. 17-24.
9. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. (1978). Sustainability of biological communities [*Ustojchivost' biologicheskih soobshchestv*]. Moscow: Science.

УДК 004.432

О РАЗРАБОТКЕ СЕРВЕР-ПРИЛОЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОННОЙ КОММУНИКАЦИИ

Дмитрий Игоревич Максимов
старший преподаватель
timonpm@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Современные информационные технологии открывают большие возможности для коммуникации людей. Среди них можно выделить электронную почту, чаты, блоги, социальные сети, месенджеры. Важным звеном данных технологий являются сервер-приложения, обеспечивающие хранение, обработку данных и взаимодействие пользователей. В статье рассматриваются принципы разработки таких приложений. Рассматриваемое приложение может применяться для реализации систем электронной коммуникации пользователей. В качестве языка программирования использован язык PHP.

Ключевые слова: программирование, сервер-приложение, технология клиент-сервер, электронная коммуникация, PHP.

При проектировании системы электронной коммуникации необходимо выделить основные составляющие и выявить взаимосвязи между ними (рис. 1).

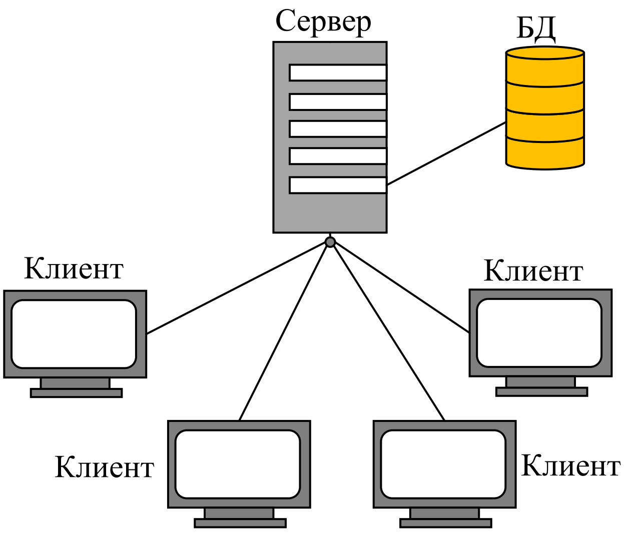


Рис. 1. Структура системы электронной коммуникации

Все данные, которые получает клиент, находятся на сервере. При отправке клиентом сообщения какому-либо клиенту его получает сервер, а уже потом переправляет его адресату. Так выглядит классическая схема архитектуры «клиент-сервер».

Таким образом, в рассматриваемой системе центральное место занимает сервер, а точнее установленное на нем сервер-приложение. В его обязанности входит работа с базами данных, передача и получение сообщений, оповещение клиентов.

Сервер-приложение представляет собой систему взаимосвязанных процессов, выполняющихся на сервере и обеспечивающую подключение и работу клиентов.

Рассматриваемое приложение имеет главный процесс и набор дочерних (рис. 2).

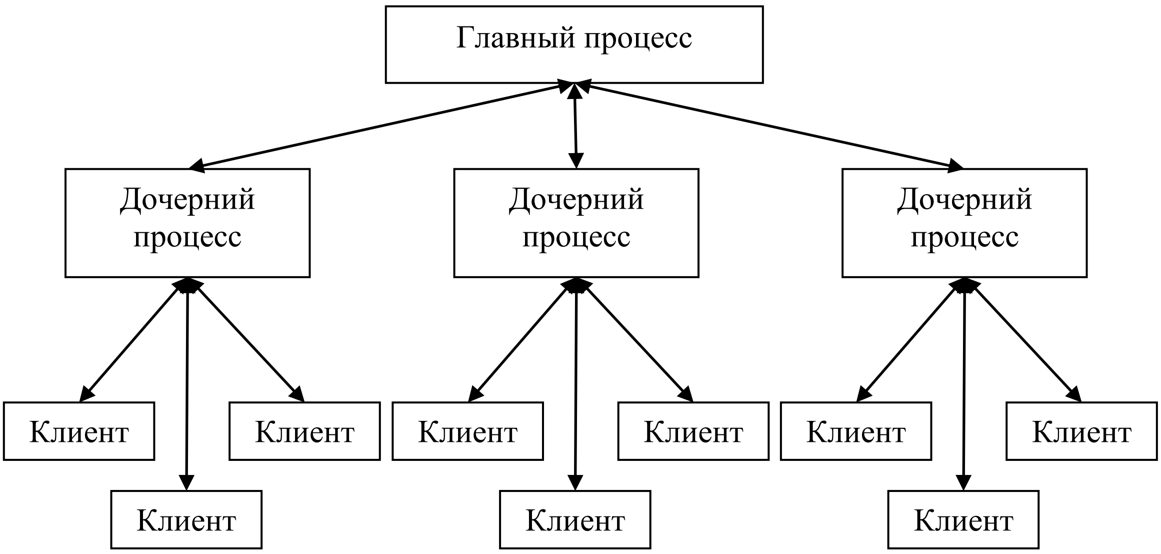


Рис. 2. Схема взаимодействия процессов сервер-приложения

Между главным и дочерними процессами устанавливаются связи при помощи парных сокетов, а между дочерними процессами и клиентами посредством TCP-соединений.

Количество дочерних процессов устанавливается в настройках сервер-приложения и зависит от предполагаемого количества клиентов. Каждый дочерний процесс может принимать до 1024 клиентов. Классы процессов реализуют интерфейс процесса, содержащий методы запуска и обработки сигналов (листинг 1).

```
interface IProcess {
   public function run();
   public function signalHandler($signo, $info = null);
}
class ProcessMaster implements IProcess {
   protected $isRun;
   protected $childSockets;

   public function __construct($childSockets = null) {
          $this->childSockets = $childSockets;
          $this->isRun = false;
   }
   ...
}
interface INotification {
   public function attach(Colleague $client);
   public function detach(Colleague $client);
   public function detachAll();
   public function notify(ARequest $message);
}
class ChildProcess implements IProcess, INotification, IBaseAcceptable {
   protected $isRun;
   protected $clients;
   protected $serverSocket;
   protected $masterSocket;
   protected $bases;

   public function __construct($config, $serverSocket, $masterSocket) {
          $this->clients = array();
          $this->serverSocket = $serverSocket;
          $this->masterSocket = $masterSocket;
          $this->config = $config;
          $this->isRun = false;
   }
   ...
}
```

Листинг 1. Интерфейсы процессов

Основным манизмом взаимодействия сервер-приложения и клиентов является механизм сообщений. Под сообщением понимается некоторый блок данных, который может быть передан по установленному соединению. Сообщение должно иметь заранее определенный формат.

В базовом классе сообщений реализовано преобразование в JSON формат, а также на основе шаблона проектирования «Мост» подключается обработчик сообщения в виде статического поля (листинг 2).

```
abstract class ARequest implements JsonSerializable {
   protected $from;
   protected $content;
   protected $id;
```

```
        protected static $handler = null;

        public function jsonSerialize() {
              return
              [
                    'id' => $this->id,
                    'handler' =>"",
                    'from' => $this->from,
                    'content' => $this->content
              ];
        }
        public function __construct($id, $content, $from) {
              $this->id = $id;
              $this->from = $from;
              $this->content = $content;
        }
        public function getHandler() {
              return self::$handler;
        }
      }
      interface IHandler {
        public function execute(ARequest $message, $sender);
        public function create();
        public function toClientData(ARequest $message);
      }
```

Листинг 2. Базовый класс сообщения

Разработанный таким образом базовый класс сообщений позволяет добавлять в систему различные типы сообщений с возможностью их обработки на сервере.

Обмен сообщениями между клиентами и дочерними процессами реализовано на основе шаблона проектирования «Посредник», что позволяет использовать различные типы сообщений и выполнять их обработку и маршрутизацию (листинг 1, 3).

```
      abstract class Colleague {
        protected $notificator;

        public function __construct(INotification $notificator = null,
$stream = null) {
              $this->notificator = $notificator;
        }
        public function __destruct() {
              $this->notificator = null;
        }
        public function setNotificator(INotification $notificator = null) {
              $this->notificator = $notificator;
        }

        public abstract function notify(ARequest $message);
      }
      class Client extends Colleague {
        protected $id;
        protected $authorized;
        protected $socket;

        public function __construct(INotification $master = null, $stream =
null) {
```

```
            parent::__construct($master);
            $this->socket = $stream;
            $this->id = -1;
            $this->authorized = AUTHORIZED_UNSET;
        }
        ...
    }
```

Листинг 3. Класс клиента

Для передачи сообщений через TCP-соединение происходит разбиение сообщения на части фиксированного размера и их упаковка в байт-код (рис. 3, листинг 4).

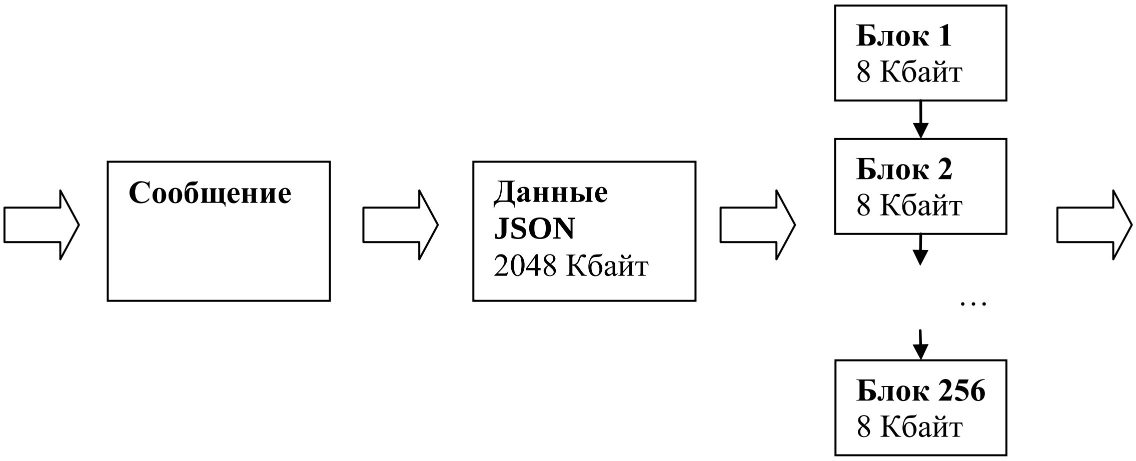


Рис. 3. Упаковка и разбиение сообщения

```
interface IPack {
    public static function pack($data);
    public static function unpack($data);
}
interface IStream {
    public static function fromStream($stream);
    public static function toStream($stream, ARequest $message);
}
```

Листинг 4. Интерфейсы классов упаковки и передачи

Использование механизма упаковки и потоков передачи позволяет передавать через соединение сообщения любых типов в одном формате.

Взаимодействие с базами данных представлено в виде базового класса и интерфейса подключения баз данных к серверу, что позволяет реализовывать подключение различных типов баз данных в процессе работы сервера (листинг 5).

```
abstract class Base {
    protected $config;
    protected $base;

    public function __construct($config) {
        $this->config = $config;
```

```
            $this->base = null;
        }
        public abstract function connect();
        public abstract function disconnect();
        public abstract function query($query);
        ...
    }
    interface IBaseAcceptable {
        public function attachBase(Base $base);
        public function detachBase(Base $base);
        public function detachAllBases();
    }
```

Листинг 5. Базовый класс баз данных

Сервер-приложение представляет собой «PHP-демона» и работает в фоновом режиме (листинг 6).

```
    class Demon {
        protected $handler;
        protected $pidFile;
        protected $logPath;

        public function __construct(IProcess $handler)
        {
            $this->handler = $handler;
            $this->pidFile = "pid.pid";
            $this->logPath = dirname(__FILE__);
        }
        ...
    }
    class Server implements IProcess, IBaseAcceptable {
        protected $config;
        protected $bases;

        public function __construct($config) {
            $this->config = $config;
        }
        ...
    }
```

Листинг 6. Класс сервера

При запуске приложения происходит создание объекта «демона», который получает заранее настроенный объект сервера. «Демон» сохраняет идентификатор процесса в файл и ведет логирование.

Таким образом, разработанная система может обслуживать неограниченное количество клиентов. Используемый механизм сообщений позволяет добавлять различные типы сообщений в систему и корректно их обрабатывать. В систему можно динамически подключать различные базы данных. Реализация в виде «демона» освобождает интерфейс сервера и возвращает управление администратору операционной системы.

Список литературы

1. Маркин А.В. Основы web-программирования на PHP: учебное пособие / А.В. Маркин, С.С. Шкарин. М.: Диалог-МИФИ, 2012.

2. Матяш С.А. Корпоративные информационные системы: учебное пособие. М.; Берлин: Директ-Медиа, 2015
3. Пирамидин А. Учебник PHP. URL: https://phpclub.ru/manrus (дата обращения: 13.01.2019)
4. Рыбальченко М.В. Архитектура информационных систем: учебное пособие / М.В. Рыбальченко; Министерство образования и науки Российской Федерации, Южный федеральный университет. Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2015. Ч. 1.
5. Шабашов В.Я. Организация доступа к данным из PHP приложений для различных СУБД: учебное пособие по дисциплине «Web-программирование». М.; Берлин: Директ-Медиа, 2019.

ABOUT DEVELOPMENT OF THE SERVER-APPLICATION FOR ELECTRONIC COMMUNICATION SYSTEM

D.I. Maksimov
senior lecturer
timonpm@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. Modern information technologies offer great opportunities for people to communicate. Among them are e-mail, chat rooms, blogs, social networks, instant messengers. An important part of the data are server applications that store and process user data. The article presents the principles for developing such applications. The considered application can be used for the implementation of electronic communication systems of users. The programming language is PHP.

Keywords: programming, server-application, client-server technology, electronic communication, PHP.

References

1. Markin, A.V. (2012). Basics of PHP web programming: tutorial [*Osnovy web-programmirovaniya na PHP: uchebnoye posobiye*]. Moscow: Dialogue-MEPI.
2. Matyash, S.A. (2015). Corporate information systems: a tutorial [*Korporativnyye informatsionnyye sistemy: uchebnoye posobiye*]. Moscow; Berlin: Direct Media.
3. Pyramidin, A., Book PHP [Electronic resource] [*Uchebnik PHP*]. URL: https://phpclub.ru/manrus
4. Rybalchenko, M.V. (2015). Information Systems Architecture: study guide [*Arkhitektura informatsionnykh sistem: uchebnoye posobiye*] / M.V. Rybalchenko; Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Southern Federal University. Taganrog: Publishing House of the Southern Federal University.
5. Shabashov, V.Ya. (2019). Organization of access to data from PHP applications for various DBMS: a tutorial on the discipline "Web-programming" [*Organizatsiya dostupa k dannym iz PHP prilozheniy dlya razlichnykh SUBD: uchebnoye posobiye po distsipline «Web-programmirovaniye»*]. Moscow; Berlin: Direct Media.

ПЕРСОНАЛИИ

УДК 372.12

АШРАФ ГУСЕЙНОВ – ОСНОВОПОЛОЖНИК МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ В АЗЕРБАЙДЖАНЕ

Мисир Джумаил оглы Марданов
член-корреспондент НАН Азербайджана, д.ф-м.н., профессор
misirmardanov@yahoo.com
Рамиз Муталлим оглы Асланов
д.п.н., профессор
r_aslanov@list.ru
Тамилла Хаверан кызы Гасанова
к. ф-м. н., доцент
q.tamilla@gmail.com
г. Баку

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Статья посвящена анализу научного наследия А.И. Гусейнова, раскрытию его роли в развитии современной математики и математического образования Азербайджана. Перу этого ученого принадлежат уникальные труды: монографии «История развития математики в Советском Азербайджане», «Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений» и первый учебник на азербайджанском языке «Интегральные уравнения».

Ключевые слова: жизнь и деятельность А.И.Гусейнова, интегральные уравнения, сингулярные интегральные уравнения, сингулярный оператор, банахово пространство, олимпиада.

Ум заключается не только в знании, но и в умении прилагать знания на деле

Аристотель

Заслуженный деятель науки, академик Ашраф Искендер оглы Гусейнов, ставший основоположником математической школы в Азербайджане, всегда вспоминается не только своей научной и общественной деятельностью, но и скромностью, добротой, отзывчивостью.

Ашраф Искендер оглы Гусейнов родился 20 сентября 1907 года в Джебраильском районе. Среднее образование он получил в Карягинской (ныне Физули) трудовой школе, затем поступил в Азербайджанский государственный университет, после окончания которого был командирован Министерством просвещения Азербайджанской ССР в Москву в Институт математики МГУ им. М.В. Ломоносова. Под научным руководством академика А.Н. Тихонова защитил кандидатскую диссертацию «Об одной задаче теории потенциала». В 1938 г. ему было присвоено учёное звание доцента.

После защиты кандидатской диссертации А.И. Гусейнов работал деканом физико-математического факультета АГУ им. С.М. Кирова и заведующим кафедрой теории функций и алгебры. В 1948 г. на Учёном совете механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова защитил докторскую диссертацию на тему «Теоремы существования и единственности для нелинейных сингулярных интегральных уравнений и некоторые их приложения».

В 1949 г. решением Высшей аттестационной комиссии ему присуждена учёная степень доктора физико-математических наук и учёное звание профессора.

В 1953-1965 гг. Ашраф Гусейнов – декан механико–математического факультета. Он принимал участие в III Всесоюзном съезде математиков. В 1960-1965 гг. являлся членом методического Совета по математике при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР.

В 1962 г. он был избран членом-корреспондентом, а в 1968 г. – действительным членом Академии наук (АН) Азербайджана. С 1965 года и до конца жизни был директором Института кибернетики АН Азербайджана. В эти годы он состоял также членом редколлегии Азербайджанской советской энциклопедии.

Ашраф Гусейнов имел весомые результаты в области интегральных уравнений и их приложений к задачам математической физики. Первые его научные работы относятся к теории потенциала.

В связи с применением общих методов нелинейного функционального анализа к нелинейным сингулярным интегральным уравнениям Ашраф Гусейнов совместно с учениками изучил вопрос дифференцируемости нелинейных сингулярных операторов в различных пространствах. Эти исследования были использованы албанскими математиками для применения метода Ньютона-Канторовича к приближённому решению нелинейных сингулярных интегральных уравнений.

Другой значительный цикл исследований учёного посвящён решению нелинейных краевых задач аналитических функций.

Им впервые была рассмотрена нелинейная краевая задача Гильберта. Будучи приведенной к нелинейному сингулярному интегральному уравнению, он доказал разрешимость этой задачи принципом Шаудера и методом последовательных приближений. Этот результат послужил основой для дальнейших исследований многих математиков по нелинейным краевым задачам, в частности, работ В.К. Наталевича, Б.И. Гехта и др.

Ашраф Гусейнов (совместно со своим учеником М. Абдурагимовым) нашел решение нелинейных задач сопряжения со смещением. Основным методом исследования в этих работах стали метод Ф.Д. Гахова, приспособленного В.А. Арисановым, а также методы нелинейных сингулярных интегральных уравнений, разработанные Гусейновым и его учениками.

Методы нелинейных сингулярных интегральных уравнений были применены учёным также для решения одной нелинейной задачи Пуанкаре.

А.И. Гусейнов в соавторстве с учеником Я.Д. Мамедовым опубликовал ряд работ, в которых на различные классы нелинейных интегральных уравнений была распространена теория Урысона о положительных решениях.

Группа азербайджанских математиков во главе с А. Гусейновым проводила исследования в области смешанных задач для параболических и гиперболических квазилинейных уравнений.

Отыскивая решение в виде разложения по собственным функциям главной части оператора, авторы сводят рассматриваемую задачу к решению бесконечной системы нелинейных интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. В зависимости от характера искомого решения строятся различные банаховы пространства функциональных последовательностей, и к изучению операторов, порождённых этими бесконечными системами, применяются методы нелинейного функционального анализа.

Среди работ Ашрафа Гусейнова следует также особо отметить книгу «История развития математики в Советском Азербайджане (1920-1960)» (совместно с чл.-корр. АН Азерб. ССР М.А. Джавадовым), монографию «Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений» (совместно с профессором Х.Ш. Мухтаровым), учебник «Интегральные уравнения» (на азербайджанском языке).

Разностороннюю научно-исследовательскую работу Ашраф Гусейнов успешно сочетал с большой научно-организационной и педагогической деятельностью.

Будучи более 15 лет деканом физико-математического, а затем механико-математического факультета Азербайджанского государственного университета, он умело направлял научно-педагогическую работу коллектива на решение важных научных проблем и подготовку высококвалифицированных специалистов.

Особо следует отметить роль Гусейнова в организации аспирантуры в Азербайджанском педагогическом институте им. В.И. Ленина (ныне Азербайджанский государственный педагогический университет) в 1934 г., вычислительного центра АГУ им. С.М. Кирова (ныне Бакинский государственный университет), Института физики и математики (ныне Институт математики и механики НАН Азербайджана), где он долгое время руководил отделом математики.

Ашраф Гусейнов с 1939 по 1965 гг. был заведующим кафедрой теории функций и алгебры Азербайджанского университета, затем – теории функций и функционального анализа, а впоследствии профессором этой кафедры.

По его инициативе и содействии были созданы кафедры теории функций и функционального анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, вычислительной математики, математического анализа.

Большая группа азербайджанских математиков начала заниматься нелинейным анализом под влиянием различных специальных курсов по нелинейному функциональному анализу, прочитанных профессором Гусейновым в университете. Большую роль в развитии нелинейного функционального анализа в Азербайджане сыграл семинар по нелинейному функциональному анализу, руководителем которого долгие годы был Гусейнов. На этом семинаре образовались и в настоящее время успешно развиваются такие научные направления, как теория ветвлений решений нелинейных уравнений, топологический метод решения нелинейных уравнений, смешанные задачи для квазилинейных параболических и гиперболических уравнений, структурные свойства сингулярных операторов, теория нелинейных сингулярных интегральных уравнений и нелинейных краевых задач аналитических функций, численное решение сингулярных интегральных уравнений.

Будучи хорошо знакомым с постановкой научно-педагогической работы в крупнейших университетах Советского Союза, А.И. Гусейнов умело применял опыт и практику этих университетов в Азербайджане. Особо следует отметить его плодотворную деятельность в руководстве математической секцией методического Совета Министерства высшего и среднего специального образования и Министерства просвещения, и как члена математической секции методического совета Министерства высшего и среднего образования СССР.

Ашраф Гусейнов активно участвовал в работах научных конференций и съездов, был председателем организационного комитета Всесоюзной конференции по применению методов функционального анализа к нелинейным задачам, Всесоюзной конференции по математическим методам решения задачи подземной нефтяной гидродинамики, заместителем председателя организационного комитета по функциональному анализу.

Свою научно-организационную и педагогическую деятельность он умело сочетал с пропагандой и популяризацией достижений математики, читал общие и специальные курсы в различных вузах Советского Союза, а в 1958 г. Министерством высшего и среднего специального образования был командирован в Албанию для чтения лекций в Тиранском университете.

Ашраф Гусейнов стал автором первых учебников по интегральным уравнениям и теории множеств на азербайджанском языке, долгое время был редактором журнала «Учёные записки АГУ им. С.И. Кирова» серии физико-математических и технических наук, был организатором математических олимпиад в школах Азербайджана.

А.И. Гусейнов, З.И. Халилов, М.А. Джавадов, Г. Н. Агаев, Б.А. Агаев сыграли большую роль в создании математической терминологии Азербайджана.

А.И. Гусейнов всегда проявлял большую заботу о подготовке молодых научных кадров для Азербайджана. А.И. Гусейнову принадлежат большие заслуги в развитии высшего образования и народного просвещения. Большую помощь оказывал школам Азербайджана.

Рис. 1. Могила А.И. Гусейнова в Баку

Ашраф Гусейнов автор более 100 научных, научно-методических и учебных работ. Под его руководством защищено более 70 кандидатских и докторских диссертаций (Ахмедов К.Т., Аббасов А.М., Мамедов Я.Д., Бабаев А.А., Худавердиев К.И., Чандиров Г.И., Мухтаров

Х.Ш. и др.) Список его трудов включён во второй том «Математика в СССР за 40 лет (1917-1957)» (М. 1959, с. 214-215).

Заслуги А.И. Гусейнова были оценены орденом «Знак почёта», медалями «За трудовую доблесть» и «За доблестный труд в период Великой Отечественной войны 1941-1945 гг.», званием Заслуженного деятеля науки и Заслуженного учителя республики.

Математическое и педагогическое наследие Ашрафа Гусейнова сыграло важную роль в развитии математики и математического образования в Азербайджане.

А.И. Гусейнов – истинный патриот своей Родины, он был не только видным учёным, замечательным педагогом, выдающимся лектором, но и добрым, скромным и отзывчивым человеком, носителем высокой духовной культуры, высоконравственным, интеллигентным человеком. Ашраф Искендер оглы Гусейнов скончался 26 августа 1980 года.

Список основных публикаций А.И. Гусейнова

1. Об одной задаче теории потенциала. Труды АГУ им. С.М. Кирова, серия математическая, т. I, вып. 1, 1942, с. 3-18.

2. Основные математические понятия и определения в средней школе. Материалы 1-го республиканского совещания преподавателей физики и математики, Баку, Азернешр, 1944, с. 3-9.

3. О конформном отображении круга на область близкую к кругу. Труды сектора математики. Баку. Изд-во АН Азерб. ССР, т. 2, 1946, с. 18-22.

4. Теоремы существования и единственности для нелинейных сингулярных интегральных уравнений. «Математический сборник», новая серия, т. 20 (62): 2, 1947, с. 292-310.

5. Теоремы существования и единственности для сингулярных нелинейных уравнений. «Успехи математических наук», 2:3 (19), 1947, с. 176-177.

6. Об одной задаче теории потенциала «Прикладная математика и механика», т. XII, вып. 1, 1948, с. 103-108.

7. Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений. «Изв. АН СССР», серия математическая, вып. 12, 1948, с. 193-212.

8. К теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Труды Института физики и математики АН Азерб. ССР, т. III, 1948, с. 57-64.

9. Об одной нелинейной задаче теории логарифмического потенциала. «ДАН Азерб. ССР», т. V, вып. 4, 1949, с. 149-154.

10. Об одной граничной задаче теории потенциала. Труды ИМФ АН Азерб. ССР, т. I, 1949, с. 3-10.

11. Об одной нелинейной граничной задаче теории аналитических функций. «Математический сборник», новая серия, т. 26 (68), вып. 2, 1950, с. 237-246.

12. Исследование одной системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений. «ДАН Азерб. ССР», т. VIII, вып. 9, 1952, с. 457-463.

13. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений. Труды Института физики и математики АН Азербайджанской ССР, т. IV-V, 1952, с. 20-23.

14. Смешанная краевая задача для гармонической функции. «ДАН Азерб. ССР», № 8, 5, 1952, с. 209-213.

15. К теории линейных сингулярных интегральных уравнений. Труды АГУ им. С.М. Кирова, серия физико-математическая, вып. III, 1953, с. 65-84.

16. Об одном применении нелинейных сингулярных интегральных уравнении. Труды Института физики и математики АН Азерб. ССР, т. VI, 1953, с. 14-24.

17. О положительных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений, линейно зависящих от параметра. «Ученые записки АГУ им. С.М. Кирова», вып. 12, 1956, с. 19-26.

18. Итоги математической олимпиады учащихся. Сборник по математике, преподавание физики и математики, вып. III, 1958, с. 21-29.

19. О производной Фреше оператора «Ученые записки АГУ им. С.М. Кирова», серия физико- математических и химических наук, вып. I, 1959, с. 3-5.

20. Исследование свойств нелинейных операторов. Труды 1-ой научной конференции Закавказских университетов. Баку, 1959, с. 59-68.

21. Конференция по применению методов функционального анализа к решению нелинейных задач в г. Баку. «Успехи математических наук», т. XXI, в. 4 (130), 1966, с. 286-292.

22. О дифференцируемости и полной непрерывности нелинейного сингулярного интегрального оператора с ядром Коши./ Уч.зап. АГУ, 1958, № 3, с.3-15 (совместно с Бабаевым А.А.)

23. О положительных решениях нелинейных уравнений./ Уч. зап. АГУ, физ.-мат. и хим.серия, 1959, № 2, с.3-14 (совместно с Мамедовым Я.Д.), (на азербайджанском языке).

24. Исследования решения нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом./ Уч. зап. АГУ, физико-математическая и химическая серия, 1960, № 3, с.3-9 (совместно с Мамедовым Я.Д.)

25. А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, “Об одном методе исследования нелинейных сингулярных уравнений”, Докл. АН СССР, 168:5 (1966),982–985

26. А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений /(монография) - М. : Наука, 1980. - 414 с.

27. А.И. Гусейнов Интегральные уравнения (на азербайджанском языке)/учебник для вузов- Баку. Маариф 1981, 392 стр.

28. А.И. Гусейнов, М.А. Джавадов История развития математики в Советском Азербайджане (1920-1960).- Баку Азернешр, 1962, 138 стр.

Список литературы

1. Асланов Р.М., Матросова Л.Н., Матросов В.Л. Предшественники современной математики историко-математические очерки. В 5 томах. Том 3. М.: МПГУ, 2011.
2. Марданов М.Д., Асланов Р.М. Предшественники современной математики Азербайджана историко-математические очерки. М.:. Изд-во «Прометей», 2016.
3. Асланов Р.М., Гасанова Т.Х. Крупный учёный в области интегральных уравнений. Газета «Элм» (Наука). 2017. № 23(1190). С. 6.
4. Мамедов О.И. Сведения о создателях математической науки (на азербайджанском языке). Баку: Изд-во «Просвещение», 1991.

ASHRAF HUSEYNOV IS A FOUNDER OF MATHEMATICAL EDUCATION AND SCIENCE IN AZERBAIJAN

M.J. Mardanov
Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Azerbaijan,
Doctor of Philosophy, Professor
misirmardanov@yahoo.com
R.M. Aslanov
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor
r_aslanov@list.ru
T.J. Hasanova
K. fm N., Associate Professor
q.tamilla@gmail.com
Baku

Institute of Mathematics and Mechanics,
National Academy of Sciences of Azerbaijan

Abstract. The article is devoted to a brief autobiography and the activities of A. Huseynov, his scientific heritage and his role in the development of modern mathematics and mathematical education in Azerbaijan. And also about his book "The history of the development of mathematics in Soviet Azerbaijan (1920-1960)", the monograph "Introduction to the theory of nonlinear singular integral equations" and the textbook "Integral Equations". The article also includes a list of some of his scientific papers.

Keywords: life and activity of A. Huseynov, integral equations, singular integral equations, singular operator, Banach space, Olympiad, teacher.

References

1. Aslanov, R., Matrosova, L., Matrosov, V. (2011). The predecessors of modern mathematics are historical and mathematical essays [*Predshestvenniki sovremennoj matematiki istoriko-matematicheskie ocherki*]. V. 3. Moscow: Moscow State Pedagogical University.
2. Mardanov, M., Aslanov, R. (2016). The predecessors of modern mathematics in Azerbaijan are historical and mathematical essays [*Predshestvenniki sovremennoj matematiki Azerbajdzhana istoriko-matematicheskie ocherki*]. Moscow: Publishing house "Prometheus".
3. Aslanov, R., Hasanova, T. (2017). A major scientist in the field of integral equations [*Krupnyj uchyonyj v oblasti integral'nyh uravnenij*]. *Newspaper "Elm" (Science).* V. 23 (1190). Pp. 6.
4. Mamedov, O. (1991). Information about the creators of mathematical science [*Svedeniya o sozdatelyah matematicheskoj nauki*]. Baku: Enlightenment Publishing House.

Научный журнал

C O N T I N U U M

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск №3(15) / 2019

Редактор – Н.П. Безногих
Компьютерная верстка – Д.И. Максимов
Техническое исполнение – В.М. Гришин
Бумага формат А-4 (54 п.л.).
Гарнитура Times. Печать трафаретная
Тираж 1000 экз. Заказ № 80
Подписано в печать 24.09.2019
Дата выхода в свет 25.09.2019
Свободная цена

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-69418 от 14 апреля 2017 г.

Адрес редакции и издателя:
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1
E-mail: apmi.elsu@gmail.com
Сайт редколлегии: http://apmi.elsu.ru

Подписной индекс журнала **№64987** в каталоге периодических изданий
органов научно-технической информации агентства «Роспечать»

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, Липецкая область, г. Елец, Коммунаров, 28,1